С. Хан

ТЕОРИЯ ИГР

Хабаровск 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тихоокеанский государственный университет»

С. Хан

ТЕОРИЯ ИГР

Утверждено
издательско-библиотечным советом университета
в качестве учебного пособия

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2015

УДК 330(075.8)
ББК 65.5я73
Х19

Рецензенты:

кафедра математики и математических методов в экономике
Хабаровской государственной академии экономики и права
(завкафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. *В. А. Вербицкий*);
гл. науч. сотр. Вычислительного центра ДВО РАН
д-р физ.-мат. наук, проф. *Р. В. Намм*

Научный редактор
канд. физ.-мат. наук, доц. *Т. М. Попова*

Хан, С.

Х19 Теория игр : учеб. пособие / С. Хан. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2015. – 103 с.

ISBN 978-5-7389-1656-4

В учебном пособии в доступной форме изложены основы теории игр. Исследованы антагонистические и неантагонистические игры *n* лиц, особое внимание уделено матричным и биматричным играм, а также кооперативным играм, приведены многочисленные примеры и решения задач, составлены теоретические вопросы для самопроверки и практические задания для эффективного освоения материала. Представлен современный библиографический список.

Для студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика», «Экономика» очной и заочной форм обучения, а также читателей, интересующихся вопросами теории игр.

УДК 330(075.8)
ББК 65.5я73

ISBN 978-5-7389-1656-4

© Тихоокеанский государственный университет, 2015
© Хан С., 2015

ВВЕДЕНИЕ

Теория игр является частью дисциплины «Исследование операций», приведем используемые в ней основные понятия.

Исследование операций – это комплекс математических дисциплин, занимающихся разработкой, построением, анализом и применением математических моделей принятия оптимальных решений.

Математическая модель – это количественное описание, часто приближенное, некоторого класса явлений или процессов реального мира.

Основной задачей Исследования операций является задача выбора в заданном множестве элемента, удовлетворяющего определенным критериям оптимальности, или эффективности. Элементы заданного множества называются *допустимыми решениями*, а выбранный элемент – *оптимальным решением*. Под *критерием оптимальности* понимают признак, на основании которого проводится сравнительная оценка допустимых решений и выбор из них оптимального.

Построение математической модели начинается с описания множества допустимых решений и критериев оптимальности; и оно должно удовлетворять двум, в принципе противоречащим друг другу, требованиям:

1) как можно точнее отразить реальные явления,
2) модель должна быть достаточно простой, позволяющей решить исходную задачу, *операцию*, и довольно быстро получить результат.

На этапе построения математической модели необходимо тесное сотрудничество исследователя операций (математика, который разрабатывает и анализирует математическую модель) и *лица принимающего решение* (специалиста – заказчика, который пользуется результатами этой модели). Каждое решение принимается в соответствии с информационным состоянием этого лица, т. е. в соответствии с его содержательным представлением о возможных и целесообразных действиях в рассматриваемых условиях.

Теория игр – раздел Исследования операций, исследующий математические модели принятия оптимальных решений в условиях неопределенности поведения и конфликта интересов взаимодействующих сторон.

Математическая модель в Теории игр называется *игрой*, допустимые решения – *стратегиями*, лицо принимающее решение – *игроком*. Совокупность стратегий каждого из игроков называют *ситуацией*. Показатель эффективности называют *выигрышем*.

Игрок располагает информацией лишь

1) о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он действительно находится;
2) о множестве стратегий, которые он может предпринять;
3) о количественной мере того выигрыша, который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации свою стратегию.

Но, заметим, что сложившаяся ситуация зависит не только от него, а и от всех остальных игроков.

Установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности и конфликта; доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам; указание алгоритмов нахождения оптимальных стратегий; реализация разработанных алгоритмов составляют предмет Теории игр.

Математическое описание игры сводится к перечислению всех действующих в ней игроков, указанию для каждого игрока всех его стратегий, а также численного выигрыша, который он получит, когда все игроки реализуют свои стратегии.

Игры можно классифицировать по различным признакам:
1) По числу игроков: *игры двух лиц и игры n лиц,* когда число игроков превышает 2. Причем следует заметить, что переход от числа 2 к большему числу игроков существенен, но зато, если найдено решение для, например, игры трех лиц, то данный метод можно безболезненно распространить и на большее число участников игры.
2) По количеству стратегий: *конечные и бесконечные игры*.
3) По характеру взаимодействия игроков: *бескоалиционные игры* (когда каждый сам за себя) и *коалиционные, кооперативные, игры* (когда члены коалиции обмениваются информацией до начала игры и принимают согласованные решения).
4) По виду распределения выигрышей: *антагонистические* (когда выигрыш одного есть полный проигрыш противника) и *игры с ненулевой суммой*.
5) По характеру получения информации: *статические игры* (игроки получают всю предназначенную им информацию до начала игры) и *динамические игры* (когда информация поступает игрокам в процессе развития игры).
6) По полноте информации: *игры с полной информацией* (когда каждый игрок знает все возможные стратегии всех участников игры) и *игры с неполной информацией* (когда игроки располагают лишь частичной информацией о возможных действиях друг друга).

Возможны и другие характеристики игр, например, *иерархические игры*, в которых игроки не равноправны по статусу или, например, *дифференциальные игры*, когда стратегии игроков представляют собой решения систем дифференциальных уравнений, и т. д.

Применение понятий и принципов Теории игр весьма разнообразно: от экономики и бизнеса до социологии и психологии и т. д. На основе Теории игр можно осуществить анализ конфликтных явлений и процессов, спрогнозировать поведение сторон, участвующих в конфликте, предложить рекомендации по его разрешению и предотвращению опасных последствий.

В данном пособии рассматриваются антагонистические, бескоалиционные и кооперативные игры.

Первая глава посвящена исследованию антагонистических игр и их частному случаю – матричным играм. Изучаются свойства оптимальных решений, приведены алгоритмы нахождения этих решений.

Во второй главе излагаются основные принципы решения неантагонистических игр. Изучены методы решения биматричных игр, как частных случаев бескоалиционных игр. Также данная глава содержит сведения о кооперативных играх и методах распределения выигрышей между коалициями игроков.

Для закрепления теоретического материала в конце пособия предлагаются задания для выполнения индивидуальных работ. Задания частично разработаны автором пособия, а частично взяты из учебников, упомянутых в библиографическом списке.

Несколько слов о специальных обозначениях, используемых в формулах. Знак $\forall$ означает «для любого», «для всех», знак $\otimes$ сигнализирует окончание доказательства теоремы. Вектор обозначается строчной буквой со стрелкой, или греческой буквой, причем в зависимости от контекста вектор может являться как вектор - строкой, так и вектор - столбцом. Матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита с указанием под буквой размерности матрицы (число строк на число столбцов).

Нумерация теорем, задач, примеров, формул и таблиц тройная, первая цифра указывает номер главы, вторая соответствует номеру параграфа, а третье число является порядковым номером в данном параграфе. Если, например, дана ссылка на теорему 1.3.4, то Вы ее легко сможете найти в третьем параграфе первой главы под четвертым номером.

Примечание. Студенты экономических специальностей могут опускать изучение доказательств теорем, но подробно разбирать решения приведенных в параграфах задач.

Глава 1
АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

В данной главе мы исследуем антагонистические игры, и особенно подробно изучим их частный случай – матричные игры.

1.1. Матричные игры

Матричные игры являются частным случаем игр двух лиц в нормальной форме.

Игрой двух лиц в нормальной форме называется совокупность четырех объектов $G=\langle X,\ Y,\ H_1,\ H_2\rangle$, где X и Y – непустые множества, элементы которых называют ***стратегиями первого и второго игроков*** соответственно; $H_1,\ H_2$ – вещественные функции, заданные на декартовом произведении $X\times Y$; упорядоченную пару $(x,\ y)\in X\times Y$ называют ***ситуацией***, а функции $H_1,\ H_2$ – ***функциями выигрыша первого и второго игроков*** соответственно.

Если выигрыш второго игрока $H_2(x,\ y)=-H_1(x,\ y),\ \forall\,(x,\ y)\in X\times Y$, то ***игра*** $G=\langle X,\ Y,\ H_1,\ H_2\rangle$ называется ***антагонистической*** и обозначается $G=\langle X,\ Y,\ H\rangle$, где $H=H_1$.

Игра $G=\langle X,\ Y,\ H_1,\ H_2\rangle$ называется ***конечной***, если X и Y – конечные множества.

В случае если X и Y – конечные множества (число элементов X равно m, число элементов Y равно n), каждой стратегии можно присвоить некоторый номер. Если к тому же игра антагонистическая, то выигрыш первого игрока $H_1(x_i,\ y_j)=a_{ij}$ – элемент матрицы $\underset{m\times n}{A}$, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, а выигрыш второго игрока, очевидно, равен $(-a_{ij})$ для каждой ситуации $(x_i,\ y_j)$. Таким образом, игра полностью определяется матрицей $\underset{m\times n}{A}=(a_{ij}),\ i=1,\ \ldots,\ m,\ j=1,\ \ldots,\ n.$

В силу вышесказанного конечная антагонистическая игра называется ***матричной игрой*** и обозначается через ***платежную матрицу***, или ***матрицу выигрышей первого игрока***, $\underset{m\times n}{A}$.

Замечание. Нумерация стратегий может производиться различными способами, поэтому конечная антагонистическая игра может быть описана различными матрицами, но отличающимися друг от друга лишь перестановкой строк или столбцов. Строки соответствуют номерам стратегий первого игрока, а столбцы – номерам стратегий второго игрока; поэтому ситуацию $(x_i,\ y_j)$ в матричной игре будем иногда обозначать $(i,\ j)$.

Пример 1.1.1. Игра «камень, ножницы, бумага».

У каждого игрока по три стратегии. Будем считать, что выигрыш составляет 5 рублей, в случае ничьей никто ничего не платит. Известно, что показавший «камень» выигрывает у того, кто выбрал «ножницы». В свою очередь, показавший «бумагу» выигрывает у того, кто выбросил «камень»; тот, кто показывает «ножницы», выигрывает у того, кто выбрал «бумагу».

В ходе игры может осуществиться одна из девяти различных ситуаций. Очевидно, игра конечная и антагонистическая. Если пронумеровать стратегии «выбрать камень», «выбрать ножницы», «выбрать бумагу» числами 1, 2, 3, то платежная матрица игры будет иметь вид

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$a_{12} = 5$, так как в ситуации $(1,\ 2)$, когда первый игрок выбрал «камень», а второй – «ножницы», выигрывает 5 рублей первый игрок. Но, например, $a_{13} = -5$, так как в ситуации $(1,\ 3)$, когда первый игрок выбрал «камень», а второй – «бумагу», выигрывает второй игрок. Следовательно, выигрыш первого игрока составит (–5) рублей.

Пример 1.1.2. Данный пример известен в литературе под названием «игра полковника Блотто».

Полковник Блотто имеет m полков, а его противник – n полков. Противник защищает две позиции, которые атакует Блотто. Противоборствующим сторонам требуется так распределить свои полки между позициями, чтобы выигрыш был максимальным.

Определим выигрыш Блотто (первого игрока) на каждой позиции. Если у него на позиции полков больше, чем у противника (второго игрока), то его выигрыш на этой позиции равен числу полков противника плюс один. Занятие позиции равносильно захвату одного полка. Если у второго игрока полков на позиции больше, чем у первого, то Блотто теряет на этой позиции все свои полки и еще единицу за не взятие позиции. Если противники

имеют одинаковое число полков на позиции, то происходит ничья, и игроки ничего не получают. Выигрыш Блотто или его противника равен сумме выигрышей на обеих позициях. Данная игра является конечной и антагонистической.

Опишем стратегии игроков. Первый игрок имеет следующие стратегии: $x_0 = (m,\ 0)$ – послать все полки на первую позицию; $x_1 = (m-1,\ 1)$ – атаковать первую позицию $(m-1)$ полком, а вторую – одним полком; $x_2 = (m-2,\ 2)$, …, $x_{m-1} = (1,\ m-1)$, $x_m = (0,\ m)$. Второй игрок имеет такие стратегии: $y_0 = (n,\ 0)$ – защищать первую позицию всеми полками; $y_1 = (n-1,\ 1)$ – оставить на первой позиции $(n-1)$ полк, а на вторую позицию перебросить один полк; $y_2 = (n-2,\ 2)$, …, $y_n = (0,\ n)$.

Допустим, Блотто выбрал стратегию x_0, а его противник – стратегию y_0. Вычислим выигрыш a_{00} первого игрока в сложившейся ситуации. Заметим, что нумерация строк и столбцов платежной матрицы начинается не с единицы, а с нуля. Предположим, для определенности, что у Блотто полков больше, чем у его противника: $m > n$, тогда на первой позиции выигрывает Блотто; его выигрыш равен $(n+1)$ – число полков противника и единица за взятие позиции. На второй позиции имеет место ничья, там выигрыш равен 0. Сумма выигрышей на обеих позициях дает $a_{00} = n+1$. Вычислим далее a_{01}. Так как $m > n-1$, то на первой позиции Блотто выигрывает $(n-1)+1 = n$. На второй позиции у Блотто 0 полков, а у противника один, поэтому Блотто проигрывает 0 своих полков и единицу за позицию: $0-1=-1$. Итак, $a_{01} = n+(-1) = n-1$. Рассуждая аналогично, для ситуаций $(x_0,\ y_j)$, $j = 1, \ldots, n$, получим выигрыш полковника Блотто $a_{0j} = ((n-j)+1)+(0-1) = n-j$, $j = 1, \ldots, n$. Далее, если мы допустим, что $m-1 > n$, то $a_{10} = (n+1)+(0+1) = n+2$, $a_{11} = ((n-1)+1)+0 = n$ и, по аналогии, $a_{1j} = ((n-j)+1)+(-1-1) = n-j-1$, $j = 2, \ldots, n$.

Но если мы предположим, что $m < n$, то $a_{00} = (-m-1)+0 = -m-1$, и если также $m < n-1$, то $a_{01} = (-m-1)+(0-1) = -m-2$, и т. д. В общем случае (для любых m и n) элементы a_{ij}, $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n$, матрицы выигрышей $\underset{(m+1)\times(n+1)}{A}$ вычисляются следующим образом:

$$a_{ij}=\begin{cases} n+2, & \text{если } m-i>n-j,\ i>j, \\ n-j+1, & \text{если } m-i>n-j,\ i=j, \\ n-j-i, & \text{если } m-i>n-j,\ i<j, \\ -m+i+j, & \text{если } m-i<n-j,\ i>j, \\ j+1, & \text{если } m-i=n-j,\ i>j, \\ -m-2, & \text{если } m-i<n-j,\ i<j, \\ -i-1, & \text{если } m-i=n-j,\ i<j, \\ -m+i-1, & \text{если } m-i<n-j,\ i=j, \\ 0, & \text{если } m-i=n-j,\ i=j. \end{cases}$$

Например, при $m=3$ и $n=5$, рассмотрев все 24 ситуации, мы получим матрицу выигрышей $\underset{4\times 6}{A}$ полковника Блотто:

$$\underset{4\times 6}{A}=\begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & -5 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -5 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Стратегии Блотто: $x_0=(3,\ 0)$, $x_1=(2,\ 1)$, $x_2=(1,\ 2)$, $x_3=(0,\ 3)$. Стратегии его противника: $y_0=(5,\ 0)$, $y_1=(4,\ 1)$, $y_2=(3,\ 2)$, $y_3=(2,\ 3)$, $y_4=(1,\ 4)$, $y_5=(0,\ 5)$. Напомним, что полученная матрица – это матрица выигрышей полковника Блотто, а у его противника матрица выигрышей будет с обратным знаком. Анализируя матрицу $\underset{4\times 6}{A}$, мы можем заметить, что Блотто выигрывает только в четырех ситуациях $(x_0,\ y_3)$, $(x_0,\ y_4)$, $(x_3,\ y_1)$, $(x_3,\ y_2)$ из двадцати четырех возможных. Это объясняется тем, что у него всего три полка, а у его противника на два полка больше.

Максимально возможный выигрыш Блотто равен 2 и он его может получить, если осуществятся ситуации $(x_0,\ y_3)$ или $(x_3,\ y_2)$. Но его противник свой максимально возможный выигрыш, равный 5, получает при разыгрывании совсем других ситуаций: $(x_0,\ y_1)$, или $(x_1,\ y_2)$, или$(x_2,\ y_3)$, или $(x_3,\ y_4)$. Возникает очевидный конфликт интересов. Если Блотто выберет стратегию x_0, рассчитывая получить выигрыш в 2 единицы, а противник выберет при этом не стратегию y_3, а стратегию y_1, то Блотто проиграется

в пух и прах! Аналогично, если второй игрок выберет стратегию y_1, надеясь на выигрыш в 5 единиц, а Блотто в это время выберет стратегию x_3, то противник Блотто не выиграет 5 единиц, а проиграет 1 единицу, т. к. осуществится не ситуация $(x_0,\ y_1)$, а ситуация $(x_3,\ y_1)$.

Задача 1.1.1. Укажите все правильные ответы в задаче:
Петя и Маша независимо друг от друга выбирают натуральные числа x и y соответственно, которые заключены между 3 и 7 включительно. Если $x \cdot y > 21$, то выигрывает Петя, и Маша платит ему y рублей. Если $x \cdot y < 21$, то выигрывает Маша, и Петя платит ей x рублей. Если $x \cdot y = 21$, то противники ничего не выплачивают друг другу. Платежная матрица игры есть

1) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -6 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -5 & -5 & 5 & 6 & 7 \\ -4 & -4 & -4 & 6 & 7 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, когда Петя является первым игроком, Маша – вторым;

2) $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 & -6 & 0 \\ -3 & -4 & -5 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 5 & 5 & 5 \\ -3 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$, когда Маша является первым игроком, Петя – вторым;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$, когда Маша является первым игроком, Петя – вторым;

4) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & -5 \\ 7 & 6 & -4 & -4 \end{pmatrix}$, когда Петя является первым игроком, Маша – вторым.

5) $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 6 & 7 \\ -5 & -5 & 5 & 6 & 7 \\ -6 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, когда Петя является первым игроком, Маша – вторым.

Решение: Прежде чем выбирать платежные матрицы следует проанализировать поведение каждого из игроков. Игрок П (Петя) может выбрать натуральное число 3 – обозначим эту стратегию $П_1$, может выбрать натуральное число 4 – обозначим эту стратегию $П_2$, …, может выбрать натуральное число 7 – обозначим эту стратегию $П_5$. Игрок М (Маша) может выбрать натуральное число 3 – обозначим эту стратегию M_1, может выбрать натуральное число 4 – обозначим эту стратегию M_2, …, может выбрать натуральное число 7 – обозначим эту стратегию M_5. Платежная матрица будет 5-го порядка, так как у каждого из игроков по 5 стратегий. Заметим, что четвертая матрица не удовлетворяет данному условию, поэтому она не может являться платежной для этой игры. Остальные матрицы 5-го порядка пока претендуют на звание «платежная матрица» в данной задаче.

Если первый игрок П выбирает число $x = 3$, а второй игрок М выбирает число $y = 3$, то мы имеем упорядоченную пару стратегий $(П_1,\ M_1)$. В такой ситуации $3 \cdot 3 = 9 < 21$, следовательно, по правилам игры выиграла Маша, и Петя платит ей $x = 3$ рубля. В платежной матрице с пронумерованными выше стратегиями, когда Петя является первым игроком, Маша – вторым, элемент $a_{11} = -3$, этот элемент является выигрышем первого игрока П в ситуации $(П_1,\ M_1)$. Знак «минус» появился оттого, что Петя выплачивает деньги Маше, в то время как данная платежная матрица – это матрица выигрышей первого игрока, то есть Пети. Аналогично в ситуации $(П_1,\ M_2)$ имеем, что $3 \cdot 4 = 12 < 21$, следовательно, $a_{12} = -3$ – это выигрыш первого игрока в ситуации $(П_1, M_2)$. Рассуждая подобным образом, мы получим, что $a_{13} = -3$ и $a_{14} = -3$. В ситуации $(П_1,\ M_5)$, когда $3 \cdot 7 = 21$, противники ничего не выплачивают друг другу, то есть $a_{15} = 0$. Подобным же образом получим, что $a_{21} = -4$, $a_{22} = -4$ и $a_{23} = -4$. В ситуации $(П_2,\ M_4)$ $4 \cdot 6 = 24 > 21$, выигрывает Петя $y = 6$ рублей, поэтому число $a_{24} = 6$ положительное. Рассуждая далее, мы получим платежную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 6 & 7 \\ -5 & -5 & 5 & 6 & 7 \\ -6 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

когда Петя является первым игроком, а Маша – вторым. Элемент этой матрицы a_{ij} есть выигрыш Пети в ситуации $(\Pi_i,\ M_j)$. Заметим, что пятая матрица совпадает с только что рассмотренной выше. Выберем ее в качестве правильного ответа.

Проанализируем далее матрицы, представленные в виде возможного решения в условии задачи.

Первая матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -6 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -5 & -5 & 5 & 6 & 7 \\ -4 & -4 & -4 & 6 & 7 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

получена из пятой матрицы перестановкой строк местами (первой и пятой, второй и четвертой соответственно). Следовательно, она тоже является платежной матрицей игры, описанной в задаче, только при условии, что первой стратегией Пети является выбор числа $x = 7$, второй стратегией – выбор числа 6, …, пятой стратегией – выбор числа 3. Номера стратегий Маши остаются прежними. Итак, и первую матрицу тоже выберем в качестве правильного ответа.

Рассмотрим вторую матрицу

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 & -6 & 0 \\ -3 & -4 & -5 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 5 & 5 & 5 \\ -3 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix},$$

когда Маша является первым игроком, Петя – вторым. Здесь $a_{11} = -3 < 0$, следовательно, выиграл второй игрок, и Маша платит ему $y = 3$ рубля. Таким образом, мы можем сделать вывод, что первая стратегия Маши – она выбрала число 3. Рассмотрим элемент $a_{12} = -4$, так как он отрицательный,

мы можем сказать, что опять выиграл Петя, и Маша должна заплатить ему 3 рубля (она ведь придерживается своей первой стратегии, потому что элемент a_{12} стоит в первой строке). Но $a_{12} = -4 \neq -3$, следовательно, вторая матрица не может быть платежной для данной игры.

В третьей матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix},$$

когда Маша является первым игроком, Петя – вторым, элемент $a_{11} = 3 > 0$, следовательно, выиграл первый игрок, и Петя платит Маше $x = 3$ рубля. Итак, мы можем сделать вывод, что первая стратегия Пети – он выбрал число 3. Так как $a_{51} = 0$, то должно было выполниться условие $x \cdot y = 21$. Учитывая, что $x = 3$, мы имеем $y = 7$, т. е. пятая стратегия Маши – это выбрать число 7. Рассмотрим элемент $a_{52} = 7$ – выигрыш Маши, когда Петя выбирает число не равное 3, потому что «выбрать 3» – это его первая стратегия. Но произведение числа 7 на любое из чисел 4, 5, 6, или 7 всегда больше, чем 21. В таком случае должен был выиграть Петя, следовательно, элемент a_{52} должен был быть отрицательным. Получив противоречие, мы делаем вывод, что третья матрица не может являться платежной при соблюдении условий игры.

Ответ: Платежные матрицы игры – это $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -6 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -5 & -5 & 5 & 6 & 7 \\ -4 & -4 & -4 & 6 & 7 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 6 & 7 \\ -5 & -5 & 5 & 6 & 7 \\ -6 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, при условии, что Петя является первым игроком, Маша – вторым.

1.2. Максимин и минимакс

В антагонистической игре $G=\langle X,\ Y,\ H\rangle$ игроки стремятся максимизировать свой выигрыш и минимизировать свой проигрыш. Предположим, что оба игрока действуют разумно, т. е. придерживаются именно такой тактики. Что всегда может гарантировать себе первый игрок? Допустим, он выбрал некоторую стратегию $x_0 \in X$, тогда в худшем случае он выиграет $\min\limits_{y\in Y} H(x_0,\ y)$. Поэтому, при любых действиях второго игрока, первый игрок может обеспечить себе наилучший гарантированный выигрыш $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y} H(x,\ y)$.

Назовем ***нижним значением игры***, или ***нижней ценой***, или ***максимином***, величину $\underline{v} = \max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y} H(x,\ y)$.

Стратегия первого игрока $\hat{x} \in X$ в игре $G=\langle X,\ Y,\ H\rangle$, на которой достигается нижнее значение игры $\underline{v}$, называется ***максиминной стратегией***: $\underline{v} = \min\limits_{y\in Y} H(\hat{x},\ y)$.

Замечание. Иногда в игре $G=\langle X,\ Y,\ H\rangle$ может не существовать максимина, а следовательно и максиминной стратегии, тогда за нижнее значение игры принимают $\underline{v} = \sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y} H(x,\ y)$.

Стремление первого игрока придерживаться своей максиминной стратегии называется ***принципом максимина***.

Замечание. В матричной игре $\underset{m\times n}{A}$ максимин существует всегда и равен $\underline{v} = \max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}$, где $i=1,\ \ldots,\ m$, $j=1,\ \ldots,\ n$. Максиминная стратегия $\hat{i}$ такова, что $\underline{v} = \min\limits_{j} a_{\hat{i}j}$.

Задача 1.2.1. Платежная матрица игры есть $\underset{3\times 5}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Найти нижнее значение игры и все максиминные стратегии.

Решение: Обозначим через α_i наименьший выигрыш первого игрока при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий B_j второго игрока (α_i – это минимальное число в i-й строке платежной матрицы), т. е.

$\alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$. Число α_i соответствует минимальному проигрышу второго игрока, в то время когда первый игрок выбирает стратегию A_i.

В первой строке минимальное число равно 0, во второй строке – это 1, в третьей – это 2. Выпишем эти числа в отдельный столбец справа от платежной матрицы. Среди всех найденных чисел α_i (i = 1, 2, 3) выберем наибольшее значение: $\underline{v} = \max\limits_{1 \le i \le m} \alpha_i$ ($\underline{v}$ – это максимальное число в особом столбце табл. 1.2.1, то есть $\underline{v} = \max\{0;\ 1;\ 2\} = 2$). Таким образом, мы нашли нижнее значение матричной игры $\underline{v}$ = 2.

Таблица 1.2.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	2	4	0	0	3	0
A_2	1	8	6	1	4	1
A_3	2	5	3	2	6	**2**

Нижнее значение игры $\underline{v}$ соответствует третьей строке платежной матрицы, следовательно, первый игрок в это время выбирает свою максиминную стратегию A_3 под номером 3.

Ответ: Нижнее значение матричной игры $\underline{v}$ = 2, максиминной является стратегия A_3 под третьим номером.

Что может гарантировать себе второй игрок в антагонистической игре $G = \langle X,\ Y,\ H \rangle$? Допустим, он выбрал стратегию $y_0 \in Y$, тогда в худшем случае он проиграет $\max\limits_{x \in X} H(x,\ y_0)$. Поэтому он всегда может гарантировать себе минимальный проигрыш, равный $\min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} H(x,\ y)$.

Назовем ***верхним значением игры***, или ***верхней ценой***, или ***минимаксом***, величину $\overline{v} = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} H(x,\ y)$.

Стратегия второго игрока $\hat{y} \in Y$ в игре $G = \langle X,\ Y,\ H \rangle$, на которой достигается верхнее значение игры $\overline{v}$, называется ***минимаксной стратегией***: $\overline{v} = \max\limits_{x \in X} H(x,\ \hat{y})$.

Замечание. Иногда в игре $G = \langle X,\ Y,\ H \rangle$ может не существовать минимакса, а следовательно и минимаксной стратегии, тогда за верхнее значение игры принимают $\overline{v} = \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} H(x,\ y)$.

Стремление второго игрока придерживаться своей минимаксной стратегии называется ***принципом минимакса***.

Замечание. В матричной игре $\underset{m\times n}{A}$ минимакс существует всегда и равен $\bar{v} = \min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij}$, где $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Минимаксная стратегия $\hat{j}$ такова, что $\bar{v} = \max\limits_{i} a_{i\hat{j}}$.

Задача 1.2.2. Платежная матрица игры есть $\underset{3\times 5}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Найти верхнее значение игры и все минимаксные стратегии.

Решение: Обозначим через β_j наибольший выигрыш первого игрока при выборе вторым игроком стратегии B_j для всех возможных стратегий A_i первого игрока (β_j – это максимальное число в j-м столбце платежной матрицы), т.е. $\beta_j = \max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$.

В первом столбце максимальное число равно 2, во втором столбце – это 8, в третьем – это 6, в четвертом – это 2, в пятом – это 6. Выпишем эти числа в отдельную строку внизу под матрицей. Среди всех найденных чисел β_j (j = 1, …, 5) выберем наименьшее значение: $\bar{v} = \min\limits_{1\le j\le n} \beta_j$. ($\bar{v}$ – это минимальное число, выделенное полужирным шрифтом, в нижней строке табл. 1.2.2, т. е. $\bar{v} = \min\{2;\ 8;\ 6;\ 2;\ 6\} = 2$). Итак, верхнее значение матричной игры $\bar{v} = 2$.

Таблица 1.2.2

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	4	0	0	3
A_2	1	8	6	1	4
A_3	2	5	3	2	6
β_j	**2**	8	6	**2**	6

Верхнее значение игры $\bar{v}$ находится в первом или четвертом столбце и соответствует стратегиям B_1 и B_4 под номерами 1 и 4.

Ответ: Верхнее значение игры $\bar{v} = 2$, минимаксными являются стратегии B_1 или B_4 под первым или четвертым номером.

Теорема 1.2.1 (свойства максимина и минимакса)

Если $\underline{v} = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} H(x,\ y)$, $\overline{v} = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} H(x,\ y)$, *и* $\hat{x} \in X$ *– максиминная стратегия, а* $\hat{y} \in Y$ *– минимаксная стратегия, то имеют место следующие неравенства*:

1) $\underline{v} \le H(\hat{x},\ y),\ \forall y \in Y$;
2) $\overline{v} \ge H(x,\ \hat{y}),\ \forall x \in X$;
3) $\underline{v} \le H(\hat{x},\ \hat{y}) \le \overline{v}$;
4) $\underline{v} \le \overline{v}$.

Доказательство. Докажем первое свойство. По определению максиминной стратегии выполняется равенство: $\underline{v} = \min\limits_{y \in Y} H(\hat{x},\ y)$. Используя определение минимума, получим, что $\min\limits_{y \in Y} H(\hat{x},\ y) \le H(\hat{x},\ y),\ \forall y \in Y$. Вследствие этого $\underline{v} = \min\limits_{y \in Y} H(\hat{x},\ y) \le H(\hat{x},\ y)$, т. е $\underline{v} \le H(\hat{x},\ y),\ \forall y \in Y$.

Второе свойство доказывается аналогично: $\overline{v} = \max\limits_{x \in X} H(x,\ \hat{y}) \ge H(x,\ \hat{y})$.

Третье свойство получается из первых двух путем подстановки в первое неравенство вместо произвольной стратегии $y \in Y$ минимаксной стратегии $\hat{y} \in Y$, а во второе неравенство вместо $x \in X$ – максиминной стратегии $\hat{x} \in X$. Таким образом получим $\underline{v} \le H(\hat{x},\ \hat{y}) \le \overline{v}$.

Четвертое свойство вытекает непосредственно из третьего, если в нем опустить число $H(\hat{x},\ \hat{y})$. $\otimes$

Свойства данной теоремы говорят, что в антагонистической игре, если игроки придерживаются своей максиминной или минимаксной стратегии, то первый игрок всегда может рассчитывать на выигрыш в $\underline{v}$ единиц, а второй игрок не может проиграть больше, чем $\overline{v}$ единиц.

1.3. Ситуация равновесия

В антагонистической игре $G = \langle X,\ Y,\ H \rangle$ ситуация $(x^*,\ y^*) \in X \times Y$ называется ***ситуацией равновесия***, или ***седловой точкой***, если выполняются неравенства

$$H(x,\ y^*) \le H(x^*,\ y^*) \le H(x^*,\ y),\ \forall x \in X \text{ и } \forall y \in Y.$$

Замечание. В матричной игре $\underset{m \times n}{A}$ ситуация $(i^*,\ j^*)$ будет ***седловой точкой***, если выполняются неравенства

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}, \text{ где } i=1, \ldots, m, \; j=1, \ldots, n;$$

т. е. значение $a_{i^*j^*}$ в седловой точке (i^*, j^*) является одновременно минимальным в строке i^* и максимальным в столбце j^*.

Принцип оптимальности, или ***равновесия***, состоит в стремлении обоих игроков осуществить ситуацию равновесия, так как ни одному из них не выгодно от нее отклоняться.

Теорема 1.3.1 (взаимозаменяемость стратегий в седловой точке)

Если $(x_1^*, y_1^*) \in X \times Y$ *и* $(x_2^*, y_2^*) \in X \times Y$ *– две ситуации равновесия в антагонистической игре* $G = \langle X, Y, H \rangle$, *то выполняются свойства*

1) $H(x_1^*, y_1^*) = H(x_2^*, y_2^*) = H(x_2^*, y_1^*) = H(x_1^*, y_2^*)$;

2) (x_2^*, y_1^*) *и* (x_1^*, y_2^*) *тоже будут ситуациями равновесия в игре* $G = \langle X, Y, H \rangle$.

<u>Доказательство</u>. Докажем первое свойство. Имеем по определению ситуации равновесия, что

$$H(x, y_1^*) \le H(x_1^*, y_1^*) \le H(x_1^*, y), \tag{1.3.1}$$

$$H(x, y_2^*) \le H(x_2^*, y_2^*) \le H(x_2^*, y). \tag{1.3.2}$$

Подставим в левое неравенство из (1.3.1) вместо произвольной ситуации $x \in X$ ситуацию $x_2^* \in X$, а в правое неравенство из (1.3.1) – вместо $y \in Y$ ситуацию $y_2^* \in Y$. Получим

$$H(x_2^*, y_1^*) \le H(x_1^*, y_1^*) \le H(x_1^*, y_2^*). \tag{1.3.3}$$

Подставим в левое неравенство из (1.3.2) вместо ситуации $x \in X$ ситуацию $x_1^* \in X$, а в правое неравенство из (1.3.2) – вместо $y \in Y$ ситуацию $y_1^* \in Y$. Получим

$$H(x_1^*, y_2^*) \le H(x_2^*, y_2^*) \le H(x_2^*, y_1^*). \tag{1.3.4}$$

Записывая последовательно (1.3.3) и (1.3.4) мы будем иметь

$$H(x_2^*, y_1^*) \le H(x_1^*, y_1^*) \le H(x_1^*, y_2^*) = H(x_1^*, y_2^*) \le H(x_2^*, y_2^*) \le H(x_2^*, y_1^*).$$

Заметим, что неравенства начинаются и заканчиваются одним числом $H(x_2^*, y_1^*)$, следовательно, имеют место равенства

$$H(x_1^*, y_1^*) = H(x_2^*, y_2^*) = H(x_2^*, y_1^*) = H(x_1^*, y_2^*).$$

Теперь докажем второе свойство. Из левого неравенства (1.3.1) имеем $H(x, y_1^*) \le H(x_1^*, y_1^*)$. По только что доказанному первому свойству –

$H\left(x_1^*,\ y_1^*\right)=H\left(x_2^*,\ y_1^*\right)$. В свою очередь, $H\left(x_2^*,\ y_1^*\right)=H\left(x_2^*,\ y_2^*\right)$, а из правого неравенства из (1.3.2) получим $H\left(x_2^*,\ y_2^*\right)\le H\left(x_2^*,\ y\right)$. Таким образом

$$H\left(x,\ y_1^*\right)\le H\left(x_1^*,\ y_1^*\right)=H\left(x_2^*,\ y_1^*\right)=H\left(x_2^*,\ y_2^*\right)\le H\left(x_2^*,\ y\right),$$

т. е. для ситуации $\left(x_2^*,\ y_1^*\right)$ выполняются неравенства

$$H\left(x,\ y_1^*\right)\le H\left(x_2^*,\ y_1^*\right)\le H\left(x_2^*,\ y\right),$$

а это и есть определение ситуации равновесия.

Доказательство того, что $\left(x_1^*,\ y_2^*\right)$ тоже ситуация равновесия, проводится аналогично. ⊗

Назовем стратегии, входящие в ситуации равновесия, ***оптимальными стратегиями***.

Теорема 1.3.1 гарантирует, что оптимальные стратегии первого игрока взаимозаменяемы в ситуации равновесия. То же самое можно сказать про оптимальные стратегии второго игрока. Причем значение функции выигрыша в различных ситуациях равновесия не изменяется.

Значение функции выигрыша первого игрока в ситуации равновесия назовем ***значением***, или ***ценой***, игры $G=\langle X,\ Y,\ H\rangle$ и обозначим v, $v=H\left(x^*,\ y^*\right)$.

Обозначим через X^* множество всех оптимальных стратегий первого игрока, а через Y^* – множество всех оптимальных стратегий второго игрока, тогда множество всех ситуаций равновесия $Z(G)$ для данной игры $G=\langle X,\ Y,\ H\rangle$ будет равно их декартову произведению: $Z(G)=X^*\times Y^*$.

Теорема 1.3.2 (о масштабе)

Пусть даны две игры $G_1=\langle X,\ Y,\ H_1\rangle$ *и* $G_2=\langle X,\ Y,\ H_2\rangle$ *такие, что*

$$H_2(x,\ y)=a\cdot H_1(x,\ y)+b,\ \ \forall(x,\ y)\in X\times Y. \qquad (1.3.5)$$

Предполагается, что a *и* b *– константы, причем* $a>0$. *Тогда* $Z(G_2)=Z(G_1)$ *и* $v(G_2)=a\cdot v(G_1)+b$, *где* $v(G_1)$ *и* $v(G_2)$ *– цена в соответствующей игре.*

<u>Доказательство</u>. В теории множеств доказательство равенства двух множеств $Z(G_2)=Z(G_1)$, сводится к доказательству двух включений: $Z(G_1)\subseteq Z(G_2)$ и $Z(G_2)\subseteq Z(G_1)$. Возьмем произвольную ситуацию равновесия $\left(x^*,\ y^*\right)\in Z(G_1)$, для нее по определению выполняются неравенства

$$H_1\left(x,\ y^*\right)\le H_1\left(x^*,\ y^*\right)\le H_1\left(x^*,\ y\right),\ \forall x\in X \text{ и } \forall y\in Y.$$

По свойствам для неравенств, учитывая, что $a>0$, будем иметь
$\left[a\cdot H_1\left(x,\ y^*\right)+b\right]\le\left[a\cdot H_1\left(x^*,\ y^*\right)+b\right]\le\left[a\cdot H_1\left(x^*,\ y\right)+b\right],\ \forall x\in X,\ \forall y\in Y$.
В силу условия (1.3.5) имеем, что $a\cdot H_1\left(x,\ y^*\right)+b=H_2\left(x,\ y^*\right)$, аналогично $a\cdot H_1\left(x^*,\ y^*\right)+b=H_2\left(x^*,\ y^*\right)$ и $a\cdot H_1\left(x^*,\ y\right)+b=H_2\left(x^*,\ y\right)$. Таким образом, получим неравенства

$$H_2\left(x,\ y^*\right)\le H_2\left(x^*,\ y^*\right)\le H_2\left(x^*,\ y\right),\ \forall x\in X \text{ и } \forall y\in Y.$$

Тем самым мы доказали, что $\left(x^*,\ y^*\right)$ является ситуацией равновесия и во второй игре $G_2=\left\langle X,\ Y,\ H_2\right\rangle$, т. е. $\left(x^*,\ y^*\right)\in Z\left(G_2\right)$. В силу произвольности выбора $\left(x^*,\ y^*\right)\in Z\left(G_1\right)$, мы доказали включение $Z\left(G_1\right)\subseteq Z\left(G_2\right)$.

Возьмем произвольную ситуацию равновесия $\left(x^*,\ y^*\right)\in Z\left(G_2\right)$, для нее по определению выполняются неравенства

$$H_2\left(x,\ y^*\right)\le H_2\left(x^*,\ y^*\right)\le H_2\left(x^*,\ y\right),\ \forall x\in X \text{ и } \forall y\in Y.$$

По свойствам для неравенств, учитывая, что $\frac{1}{a}>0$, будем иметь

$$\left[\frac{1}{a}\cdot H_2\left(x,\ y^*\right)-\frac{b}{a}\right]\le\left[\frac{1}{a}\cdot H_2\left(x^*,\ y^*\right)-\frac{b}{a}\right]\le\left[\frac{1}{a}\cdot H_2\left(x^*,\ y\right)-\frac{b}{a}\right].$$

В силу условия (1.3.5) имеем, что $\frac{1}{a}\cdot H_2\left(x,\ y^*\right)-\frac{b}{a}=H_1\left(x,\ y^*\right)$, аналогично $\frac{1}{a}\cdot H_2\left(x^*,\ y^*\right)-\frac{b}{a}=H_1\left(x^*,\ y^*\right)$ и $\frac{1}{a}\cdot H_2\left(x^*,\ y\right)-\frac{b}{a}=H_1\left(x^*,\ y\right)$. Таким образом, верны неравенства

$$H_1\left(x,\ y^*\right)\le H_1\left(x^*,\ y^*\right)\le H_1\left(x^*,\ y\right),\ \forall x\in X \text{ и } \forall y\in Y.$$

Тем самым мы доказали, что $\left(x^*,\ y^*\right)$ является ситуацией равновесия и в игре $G_1=\left\langle X,\ Y,\ H_1\right\rangle$, т. е. $\left(x^*,\ y^*\right)\in Z\left(G_1\right)$. В силу произвольности выбора $\left(x^*,\ y^*\right)\in Z\left(G_2\right)$, мы доказали включение $Z\left(G_2\right)\subseteq Z\left(G_1\right)$. Совпадение множеств ситуаций равновесия в обеих играх доказано, а формула для вычисления значений игр непосредственно вытекает из (1.3.5). $\otimes$

Из теоремы 1.3.2 следует, что выигрыши в игре можно выплачивать хоть в рублях, хоть в долларах, но если стратегии игроков не меняются, то оптимальные решения остаются неизменными. Причем некоторый стартовый капитал в b единиц никак не влияет на решения игроков.

Две ***игры*** $G_1 = \langle X,\ Y,\ H_1 \rangle$ и $G_2 = \langle X,\ Y,\ H_2 \rangle$ называются ***эквивалентными*** друг другу, если $\forall (x,\ y) \in X \times Y$ выполняется равенство

$$H_2(x,\ y) = a \cdot H_1(x,\ y) + b,$$

где a и b – константы, причем $a > 0$.

Замечание. Эквивалентные игры действительно обладают свойством эквивалентности, т. е. для них выполняются свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности одновременно.

Замечание. Эквивалентные игры отличаются лишь масштабом выигрыша и начальным капиталом, независимым от ситуаций, возникающих в игре.

Теорема 1.3.3 (критерий существования ситуации равновесия)

В антагонистической игре $G = \langle X,\ Y,\ H \rangle$ *существует ситуация равновесия в чистых стратегиях* $(x^*,\ y^*) \in X \times Y$ *тогда и только тогда, когда существуют максиминные и минимаксные стратегии, причем* $\underline{v} = \overline{v}$.

Доказательство. Докажем необходимость. По условию теоремы мы имеем ситуацию равновесия $(x^*,\ y^*) \in X \times Y$, следовательно, в силу определения для нее выполняются неравенства

$$H(x,\ y^*) \le H(x^*,\ y^*) \le H(x^*,\ y),\ \forall x \in X \text{ и } \forall y \in Y. \qquad (1.3.6)$$

Рассмотрим $\overline{v} = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} H(x,\ y)$. По определению минимума выполнено неравенство $\min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} H(x,\ y) \le \max\limits_{x \in X} H(x,\ y),\ \forall y \in Y$. Т. к. это неравенство справедливо для любой стратегии второго игрока $y \in Y$, то оно сохранится и для оптимальной $y^* \in Y$, т. е.

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} H(x,\ y) \le \max_{x \in X} H(x,\ y^*). \qquad (1.3.7)$$

Возьмем левое неравенство из (1.3.6) и «навесим» на обе части максимум: $\max\limits_{x \in X} H(x,\ y^*) \le \max\limits_{x \in X} H(x^*,\ y^*)$; но $H(x^*,\ y^*)$ – это константа, не зависящая от $x \in X$, следовательно, $\max\limits_{x \in X} H(x^*,\ y^*) = H(x^*,\ y^*)$, т. е.

$$\max_{x \in X} H(x,\ y^*) \le H(x^*,\ y^*). \qquad (1.3.8)$$

«Навешивая» минимумы на правое неравенство из (1.3.6) и рассуждая аналогично, получим

$$H(x^*,\ y^*) \le \min_{y \in Y} H(x^*,\ y). \qquad (1.3.9)$$

По определению максимума

$$\min_{y\in Y} H\left(x^*,\ y\right) \le \max_{x\in X}\min_{y\in Y} H\left(x,\ y\right). \qquad (1.3.10)$$

Заметим, что $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y} H\left(x,\ y\right)=\underline{v}$. Таким образом, записывая последовательно неравенства (1.3.7) – (1.3.10), мы получим

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H\left(x,y\right) \le \max_{x\in X} H\left(x,y^*\right) \le H\left(x^*,y^*\right) \le \min_{y\in Y} H\left(x^*,y\right) \le \max_{x\in X}\min_{y\in Y} H\left(x,y\right).$$

Итак, мы доказали, что $\overline{v} \le \underline{v}$; но из пункта 4 теоремы 1.2.1 мы имеем, что $\underline{v} \le \overline{v}$. Таким образом мы получим: $\underline{v} = \overline{v}$, т. е. все неравенства (1.3.7) – (1.3.10) превратились в равенства. Т. к. $\underline{v} = \min\limits_{y\in Y} H\left(x^*,\ y\right)$, то оптимальная стратегия первого игрока x^* является, по определению, максиминной стратегией. В свою очередь т. к. $\overline{v} = \max\limits_{x\in X} H\left(x,\ y^*\right)$, то оптимальная стратегия второго игрока y^* является минимаксной.

Докажем достаточность критерия. Если $\underline{v} = \overline{v}$, то из свойства 3 теоремы 1.2.1 имеем, $\underline{v} = H\left(\hat{x},\ \hat{y}\right) = \overline{v}$, где $\hat{x}$ – максиминная стратегия, а $\hat{y}$ – минимаксная. По свойствам 1 и 2 той же теоремы $\underline{v} \le H\left(\hat{x},\ y\right),\ \forall y\in Y$, а $\overline{v} \ge H\left(x,\ \hat{y}\right),\ \forall x\in X$. Итак, для ситуации $\left(\hat{x},\ \hat{y}\right)\in X\times Y$ выполняются неравенства

$$H\left(x,\ \hat{y}\right) \le H\left(\hat{x},\ \hat{y}\right) \le H\left(\hat{x},\ y\right),\ \forall x\in X \text{ и } \forall y\in Y,$$

т. е. $\left(\hat{x},\ \hat{y}\right)$ является ситуацией равновесия. ⊗

Если в антагонистической игре $G=\left\langle X,\ Y,\ H\right\rangle$ существует ситуация равновесия, то ***игру*** называют ***вполне определенной***, т. к. исход игры предопределен и не зависит от искусности или удачливости игроков. Они, придерживаясь принципа оптимальности, один выплачивает, другой получает значение игры (даже возможно без разыгрывания этой игры). Выбор оптимальной стратегии нет смысла скрывать от противника, поэтому это свойство целесообразно использовать, например, при переговорах.

Теорема 1.3.4 (критерий вполне определенности матричной игры)

Матричная игра $\underset{m\times n}{A}$ *вполне определена тогда и только тогда, когда выполнено равенство* $\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij} = \min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij}$, *где* $i=1,\ \ldots,\ m,\ j=1,\ \ldots,\ n$.

Теорема 1.3.4 является частным случаем теоремы 1.3.3.

Задача 1.3.1. Платежная матрица игры есть $\underset{3\times 5}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Найти значение игры и все седловые точки.

Решение: В задачах 1.2.1 и 1.2.2 мы нашли нижнее и верхнее значение игры с данной матрицей: $\underline{v} = 2$ и $\overline{v} = 2$. По теореме 1.3.4, т. к. $\underline{v} = \overline{v}$, то существует значение игры $v = 2$, и седловые точки: $(3,\ 1)$ или $(3,\ 4)$, полученные из максиминной стратегии A_3 и минимаксных стратегий B_1 или B_4. Заметим, что хотя $a_{11} = 2 = v$, ситуация $(1,\ 1)$ не является седловой точкой, т. к. a_{11} не является минимальным элементом в первой строке.

Ответ: Значение игры $v = 2$, седловые точки: $(3,\ 1)$ или $(3,\ 4)$.

Задача 1.3.2. Платежная матрица игры есть $\underset{5\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти значение игры и все седловые точки.

Решение: Сначала найдем $\underline{v}$ и $\overline{v}$. Выписываем справа от матрицы столбец с минимальными числами в каждой строке. Максимальное число в полученном столбце табл. 1.3.1 и есть нижняя цена $\underline{v} = 4$.

Таблица 1.3.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	1	3	6	1
A_2	5	1	4	4	1
A_3	7	8	5	4	**4**
A_4	3	0	2	2	0
A_5	4	5	1	1	1

Таблица 1.3.2

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	1	3	6
A_2	5	1	4	4
A_3	7	8	5	4
A_4	3	0	2	2
A_5	4	5	1	1
β_j	7	8	**5**	6

Создадим под платежной матрицей дополнительную строку. Эта строка состоит из максимальных чисел каждого столбца платежной матрицы. Минимальное число в последней строке табл. 1.3.2 есть верхняя цена $\overline{v} = 5$. Т. к. нижняя цена не совпадает с верхней, то по теореме 1.3.4 не существует седловых точек и цены игры.

Ответ: Не существует седловых точек и не определено значение игры.

1.4. Смешанное расширение матричной игры

В задаче 1.3.2 отсутствуют седловые точки, так бывает в большинстве антагонистических игр, но при этом максиминная и минимаксная стратегии в этом случае не могут являться оптимальными. Более того, иногда игрокам бывает невыгодно их придерживаться, т. к. отклонившись от них, они могут получить больший выигрыш.

Пример 1.4.1. Рассмотрим матричную игру $\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Нижняя цена игры $\underline{v} = 4$, а верхняя цена $\overline{v} = 7$. Т. к. $\underline{v} \neq \overline{v}$, то седловых точек нет. Максиминная стратегия $\hat{i} = 1$, минимаксная – $\hat{j} = 2$. Допустим, первый игрок заранее знает, что второй игрок пессимист, который всегда придерживается минимаксной стратегии. В таком случае первому игроку лучше отклонится от максиминной стратегии и выбрать стратегию под вторым номером, чтобы получить выигрыш в 7 единиц, а не 4. Но если второй игрок догадается о таком маневре первого игрока и тоже сменит свою минимаксную стратегию на стратегию под номером 1, то первый игрок ничего не выиграет, вместо гарантированных 4 единиц. Подобные рассуждения можно провести и для второго игрока. Следовательно, в отличие от вполне определенной игры, участникам такой игры лучше скрывать свои намерения и делать выбор стратегий случайным образом.

Случайная величина $\xi : X \to [0, 1]$ ($\eta : Y \to [0, 1]$), значениями которой являются стратегии игрока, называется его ***смешанной стратегией***.

Учитывая только что введенное определение смешанных стратегий, первоначальные ***стратегии*** $x \in X$ ($y \in Y$) будем называть ***чистыми***.

Замечание. Так как случайная величина характеризуется своим распределением, то в дальнейшем отождествим смешанную стратегию с вероятностным распределением случайной величины, определенной на множестве чистых стратегий.

Например, ***в матричной игре*** $\underset{m\times n}{A}$ ***смешанной стратегией первого игрока*** назовем любое распределение вероятностей на множестве номеров чистых стратегий этого игрока, т.е. смешанной стратегией будет m-мерный вектор $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_m)$ такой, что $\xi_i\geq 0,\ i=1,\ \ldots,\ m,\ \sum_{i=1}^{m}\xi_i=1$. Аналогично для ***второго игрока – смешанной стратегией*** является n-мерный вектор $\eta=(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)$ такой, что $\eta_j\geq 0,\ j=1,\ \ldots,\ n,\ \sum_{j=1}^{n}\eta_j=1$.

Смешанным расширением матричной игры $\underset{m\times n}{A}$ называется тройка $\langle\Xi,\ \aleph,\ K\rangle$, где Ξ и $\aleph$ – множества смешанных стратегий первого и второго игрока соответственно; значение функции выигрыша первого игрока $K(\xi,\ \eta)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\xi_i\,\eta_j$, где $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_m)$ – произвольная смешанная стратегия первого игрока, а $\eta=(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)$ – произвольная смешанная стратегия второго игрока.

Задача 1.4.1. Выберите все правильные ответы в задаче:

Платежная матрица игры есть $\underset{3\times 5}{A}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 5 & 3\\ 1 & 8 & 6 & 7 & 4\\ 4 & 5 & 2 & 6 & 6\end{pmatrix}$. Тогда смешанными стратегиями первого игрока могут являться:

$$1)\ \left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right),\ 2)\ \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0\right),\ 3)\ \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right),\ 4)\ \left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right).$$

Решение: Каждая смешанная стратегия первого игрока полностью определяется вероятностями $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$, с которыми он выбирает соответствующие чистые стратегии $A_1,\ A_2,\ A_3$ (платежная матрица имеет три строки). Поэтому произвольную смешанную стратегию первого игрока можно отождествить с трехмерным вектором $\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$, $\xi_i\geq 0,\quad i=1,\ 2,\ 3,\ \sum_{i=1}^{3}\xi_i=1$.

Вектор $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ не может являться смешанной стратегией первого игрока, так как он содержит 4 компоненты, а чистых стратегий у первого игрока только 3.

Вектор $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$ является смешанной стратегией первого игрока потому, что это вектор с тремя неотрицательными компонентами, сумма которых равна 1.

Вектор $\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3}\right)$ не может быть смешанной стратегией, так как сумма всех компонент данного вектора не равна 1, но $\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

Вектор $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ не является смешанной стратегией, так как первая компонента этого вектора отрицательна.

Ответ: Вектор $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$ является смешанной стратегией первого игрока.

Задача 1.4.2. Платежная матрица игры есть $\underset{3\times 5}{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 8 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Смешанная стратегия первого игрока $\xi=\left(\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{2}{3}\right)$, а второго игрока – $\eta=\left(0;\ \frac{1}{2};\ 0;\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$. Найти выигрыши первого и второго игрока в данной ситуации $(\xi;\ \eta)$.

Решение: Выигрыш первого игрока в ситуации в смешанных стратегиях $(\xi;\ \eta)$ определяется по формуле $K(\xi,\ \eta)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_i\,\eta_j$. Когда $m=3,\ n=5,$ формула имеет вид

$$K(\xi,\ \eta)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} a_{ij}\,\xi_i\,\eta_j=\sum_{i=1}^{3}\xi_i\sum_{j=1}^{5} a_{ij}\eta_j=\sum_{i=1}^{3}\xi_i\left(a_{i1}\eta_1+a_{i2}\eta_2+a_{i3}\eta_3+a_{i4}\eta_4+a_{i5}\eta_5\right),$$

т. е. $K(\xi,\ \eta)=\xi_1\cdot\left(a_{11}\eta_1+a_{12}\eta_2+a_{13}\eta_3+a_{14}\eta_4+a_{15}\eta_5\right)+$

$$+\xi_2\cdot\left(a_{21}\eta_1+a_{22}\eta_2+a_{23}\eta_3+a_{24}\eta_4+a_{25}\eta_5\right)+$$

$$+\xi_3\cdot\left(a_{31}\eta_1+a_{32}\eta_2+a_{33}\eta_3+a_{34}\eta_4+a_{35}\eta_5\right).$$

При $\xi_1=\frac{1}{3},\ \xi_2=0,\ \xi_3=\frac{2}{3},\ \eta_1=0,\ \eta_2=\frac{1}{2},\ \eta_3=0,\ \eta_4=0,\ \eta_5=\frac{1}{2}$ получим

$$K(\xi,\ \eta)=\frac{1}{3}\left(2\cdot 0+4\cdot\frac{1}{2}+0\cdot 0+5\cdot 0+3\cdot\frac{1}{2}\right)+0+\frac{2}{3}\left(5\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6}+\frac{22}{6}=\frac{29}{6}.$$

Ответ: Выигрыш первого игрока в данной ситуации $(\xi;\ \eta)$ равен $\frac{29}{6}$, так как игра антагонистическая, то выигрыш второго игрока равен $\left(-\frac{29}{6}\right)$.

$(\xi^*,\ \eta^*)$ называется ***ситуацией равновесия в смешанных стратегиях*** смешанного расширения матричной игры $\langle \Xi,\ \aleph,\ K\rangle$, если выполняются неравенства

$$K(\xi,\ \eta^*)\le K(\xi^*,\ \eta^*)\le K(\xi^*,\ \eta),\ \forall\xi\in\Xi,\ \forall\eta\in\aleph, \qquad (1.4.1)$$

причем $V(A)=K(\xi^*,\ \eta^*)$ называется ***значением смешанного расширения матричной игры*** $\langle \Xi,\ \aleph,\ K\rangle$, упрощенно его будем называть ***значением игры***, а прежнее значение v назовем ***чистой ценой игры***.

Теорема 1.4.1 (о масштабе для матричных игр)

Пусть даны игры с матрицами $\underset{m\times n}{A}$ *и* $\underset{m\times n}{A'}$, *причем* $\underset{m\times n}{A'}=\alpha\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}$, *где* α *– положительная константа, а в матрице* $\underset{m\times n}{B}$ *все элементы равны одному и тому же числу* β. *Тогда множества ситуаций равновесия в смешанных стратегиях с матрицами* $\underset{m\times n}{A}$ *и* $\underset{m\times n}{A'}$ *совпадают, и* $V(A')=\alpha V(A)+\beta$, *где* $V(A)$, $V(A')$ *– значение смешанного расширения игры с матрицами* $\underset{m\times n}{A}$ *и* $\underset{m\times n}{A'}$ *соответственно*.

Доказательство теоремы 1.4.1 проводится аналогично доказательству теоремы 1.3.2.

Замечание. Рассмотрим смешанную стратегию первого игрока, равную m-мерному единичному вектору с единицей на i-м месте (обозначим его через $\vec{i}$). Такая стратегия предписывает первому игроку выбрать чистую стратегию под i-м номером с вероятностью 1. Естественно отождествить эту смешанную стратегию с чистой стратегией. Аналогично отождествим n-мерные единичные векторы с единицей на j-м месте (обозначим через $\vec{j}$) с чистыми стратегиями под j-ми номерами. Таким образом множества чистых стратегий могут быть вложены в множества смешанных стратегий.

Теорема 1.4.2 (Неймана)

В любой матричной игре $\underset{m\times n}{A}$ *существует ситуация равновесия в смешанных стратегиях*.

Доказательство. Случай 1. Если в матричной игре $\underset{m\times n}{A}$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях $\left(i^*,\ j^*\right)$, то по вышеуказанному замечанию о вложении множеств чистых стратегий в множества смешанных стратегий ситуация $\left(\vec{i}^*,\ \vec{j}^*\right)$ будет ситуацией равновесия в смешанных стратегиях. Случай 1 доказан.

Случай 2. Пусть дана матричная игра $\underset{m\times n}{A}$ со всеми положительными элементами a_{ij} (обозначим данный факт, как $\underset{m\times n}{A} > 0$). Составим двойственные друг другу задачи линейного программирования

$$f^* = B^{\mathrm{T}}X \to \min \qquad\qquad f = C^{\mathrm{T}}Y \to \max$$

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}X \ge C \\ X \ge 0 \end{cases} \quad (1) \qquad\qquad \begin{cases} AY \le B \\ Y \ge 0 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь компонентами вектор-столбцов $\underset{m\times 1}{B}$ и $\underset{n\times 1}{C}$ являются только единицы.

Т. к. $\underset{m\times n}{A} > 0$ и C состоит только из единиц, то существует допустимое решение задачи (1). Допустимым решением задачи (2) может являться нулевой вектор. Следовательно, по теореме двойственности, доказываемой в Математическом программировании, существуют оптимальные решения $X_{\min}$, $Y_{\max}$ обеих задач (1) и (2), причем $B^{\mathrm{T}}X_{\min} = C^{\mathrm{T}}Y_{\max}$. Обозначим данное число через M: $M = B^{\mathrm{T}}X_{\min} = C^{\mathrm{T}}Y_{\max}$. Т. к. $X_{\min} \ge 0$, но $X_{\min} \ne 0$, а $\underset{m\times 1}{B}$ состоит только из единиц, то число М положительно. Обозначим $\xi^* = \dfrac{X_{\min}}{M}$, $\eta^* = \dfrac{Y_{\max}}{M}$ и докажем, что $\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$ – ситуация равновесия в смешанных стратегиях. Т. к. $X_{\min} \ge 0$, $Y_{\max} \ge 0$, $M > 0$, то очевидно, что $\xi^* \ge 0$, $\eta^* \ge 0$. К тому же $\sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i^* = B^{\mathrm{T}}\xi^* = B^{\mathrm{T}}\dfrac{X_{\min}}{M} = \dfrac{B^{\mathrm{T}}X_{\min}}{M} = \dfrac{M}{M} = 1$, т. е. ξ^* является смешанной стратегией первого игрока. Аналогично $\sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j^* = C^{\mathrm{T}}\eta^* = \dfrac{C^{\mathrm{T}}Y_{\max}}{M} = \dfrac{M}{M} = 1$, т. е. η^* тоже является смешанной стратегией, но второго игрока. Заметим, что в силу условий задач (1), (2) и свойств произведения матриц, $M = C^{\mathrm{T}}Y_{\max} \le \left(A^{\mathrm{T}}X_{\min}\right)^{\mathrm{T}} Y_{\max} = X_{\min}^{\mathrm{T}} A Y_{\max} \le X_{\min}^{\mathrm{T}} B = M$, т. е. $X_{\min}^{\mathrm{T}} A Y_{\max} = M$. Сле-

довательно, $V(A)=K(\xi^*,\ \eta^*)=(\xi^*)^{\mathrm{T}}A\eta^*=\dfrac{X_{\min}^{\mathrm{T}}AY_{\max}}{M^2}=\dfrac{M}{M^2}=\dfrac{1}{M}$. Возьмем произвольную смешанную стратегию первого игрока ξ и получим, что

$$K(\xi,\ \eta^*)=\xi^{\mathrm{T}}A\eta^*=\xi^{\mathrm{T}}\frac{AY_{\max}}{M}\le\frac{\xi^{\mathrm{T}}B}{M}=\frac{1}{M}=K(\xi^*,\ \eta^*).$$

Возьмем произвольную смешанную стратегию второго игрока η и докажем аналогично, что

$$K(\xi^*,\ \eta)=(\xi^*)^{\mathrm{T}}A\eta=\frac{X_{\min}^{\mathrm{T}}A}{M}\eta\ge\frac{C^{\mathrm{T}}\eta}{M}=\frac{1}{M}=K(\xi^*,\ \eta^*).$$

Итак, выполняются неравенства

$$K(\xi,\ \eta^*)\le K(\xi^*,\ \eta^*)\le K(\xi^*,\ \eta),\ \forall\xi\in\Xi \text{ и } \forall\eta\in\aleph,$$

т. е. $(\xi^*,\ \eta^*)$ действительно ситуация равновесия в смешанных стратегиях, а значение игры $V(A)=\dfrac{1}{M}$. Случай 2 доказан.

Случай 3. Если мы имеем произвольную платежную матрицу $\underset{m\times n}{A}$ без ситуаций равновесия в чистых стратегиях, то составим матрицу $\underset{m\times n}{S}=\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{R}$, где каждый элемент матрицы $\underset{m\times n}{R}$ равен числу $r=\left|\min\limits_{i,j}a_{ij}\right|+1$. Таким образом $\underset{m\times n}{S}>0$, а для такой матрицы из случая 2 мы доказали, что существует ситуация равновесия в смешанных стратегиях $(\xi^*,\ \eta^*)$, и значение игры $V(S)=\dfrac{1}{M}$. Тогда по теореме 1.4.1 $(\xi^*,\ \eta^*)$ будет ситуацией равновесия в смешанных стратегиях с платежной матрицей $\underset{m\times n}{A}$, а значение игры $V(A)=\dfrac{1}{M}-r$. Доказательством случая 3 исчерпываются все возможные варианты платежных матриц. ⊗

Составим **план решения матричной игры** $\underset{m\times n}{A}$:

1) Проверяем, что ситуаций равновесия в чистых стратегиях не существует (если таковые найдутся, то найдены оптимальные чистые стратегии и чистая цена игры).
2) Если $\underset{m\times n}{A}>0$, то переходим в пункт 3 (считая $\underset{m\times n}{S}=\underset{m\times n}{A}$), иначе строим матрицу $\underset{m\times n}{S}=\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{R}$, где каждый элемент матрицы $\underset{m\times n}{R}$ равен числу $r=\left|\min\limits_{i,j}a_{ij}\right|+1$.

3) Находим оптимальные решения $X_{\min}$, $Y_{\max}$ задач линейного программирования

$$\begin{cases} f^* = B^{\mathrm{T}} X \to \min \\ S^{\mathrm{T}} X \geq C \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (3), \qquad \begin{cases} f = C^{\mathrm{T}} Y \to \max \\ SY \leq B \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (4),$$

в которых компонентами вектор-столбцов $\underset{m\times 1}{B}$ и $\underset{n\times 1}{C}$ являются только единицы. Вычислим $M = B^{\mathrm{T}} X_{\min} = C^{\mathrm{T}} Y_{\max}$.

4) Находим ситуацию равновесия в смешанных стратегиях $\left(\xi^*, \eta^*\right)$, где $\xi^* = \dfrac{X_{\min}}{M}$, $\eta^* = \dfrac{Y_{\max}}{M}$.

5) Находим значение игры $V\left(A\right) = \dfrac{1}{M} - r$ (или $V\left(A\right) = \dfrac{1}{M}$, если $\underset{m\times n}{S} = \underset{m\times n}{A}$).

Задача 1.4.3. Платежная матрица игры есть $\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Найти ситуацию равновесия в смешанных стратегиях и значение игры.

Решение: 1) Находим способом, описанным в задачах 1.2.1 и 1.2.2, нижнюю цену $\underline{v} = 0$ и верхнюю цену игры $\overline{v} = 1$. Т. к. $\underline{v} \neq \overline{v}$, то по теореме 1.3.4 ситуаций равновесия в чистых стратегиях не существует.

2) В матрице $\underset{3\times 3}{A}$ существуют отрицательные элементы, среди которых минимальный $a_{33} = -4$, поэтому находим $r = \left|\min\limits_{i,j} a_{ij}\right| + 1 = \left|-4\right| + 1 = 5$ и составляем матрицу $\underset{3\times 3}{R} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$. Строим матрицу $\underset{3\times 3}{S} = \underset{3\times 3}{A} + \underset{3\times 3}{R} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 8 & 5 & 9 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, которая удовлетворяет условию $\underset{m\times n}{S} > 0$.

3) Находим оптимальные решения $X_{\min}$, $Y_{\max}$ задач линейного программирования (3) и (4). Заметим, что задачу (4), имеющую развернутую запись вида

$$f = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 6y_2 + 4y_3 \le 1, \\ 8y_1 + 5y_2 + 9y_3 \le 1, \\ 5y_1 + 6y_2 + y_3 \le 1, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0. \end{cases}$$

можно решить симплекс-методом, если преобразовать данную задачу стандартного вида в задачу канонического вида

$$f = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 6y_2 + 4y_3 + \hat{y}_4 = 1, \\ 8y_1 + 5y_2 + 9y_3 + \hat{y}_5 = 1, \\ 5y_1 + 6y_2 + y_3 + \hat{y}_6 = 1, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0, \\ \hat{y}_4 \ge 0,\ \hat{y}_5 \ge 0,\ \hat{y}_6 \ge 0. \end{cases}$$

Напомним, как решается задача симплекс-методом в Математическом программировании. Составляем первую табл. 1.4.1 симплекс-метода.

Таблица 1.4.1

			1	1	1	0	0	0	
$c_i^б$	базис	b_i	y_1	y_2	y_3	$\hat{y}_4$	$\hat{y}_5$	$\hat{y}_6$	Θ_i
0	$\hat{y}_4$	1	4	6	4	1	0	0	1/4
0	$\hat{y}_5$	1	**8**	5	9	0	1	0	$1/8^*$
0	$\hat{y}_6$	1	5	6	1	0	0	1	1/5
	Δ_j:		-1^*	-1	-1	0	0	0	

В первой строке над переменными y_j и $\hat{y}_j$ записываем соответствующие коэффициенты c_j целевой функции $f = y_1 + y_2 + y_3$. В столбцах под переменными y_j, $j = 1, 2, 3$, записываем матрицу $\underset{3\times3}{S}$, а в столбцах под $\hat{y}_j$, $j = 4$, 5, 6, записываем единичную матрицу. В столбец под b_i записываем свободные члены системы уравнений. Во второй столбец выписываем базисные переменные $\hat{y}_j$. В первый столбец под $c_i^б$ записываем коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. В последней строке под базисными переменными $\hat{y}_j$ выписываем оценки $\Delta_j = 0$, а под переменными y_j – оценки $\Delta_j = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i^б s_{ij} - c_j \right)$. Находим наименьшую отрица-

тельную оценку Δ_j, которая задает разрешающий столбец, его метим знаком «*». Т. к. у нас оказалось три одинаковых оценки $\Delta_j = -1$, то в качестве разрешающего столбца выберем первый. Находим элементы оценочного столбца $\Theta_i = \dfrac{b_i}{s_{i\,j^*}}$ – равные отношению свободных членов b_i к положительным элементам $s_{i\,j^*} > 0$ разрешающего столбца. Среди оценок Θ_i находим минимальную, она указывает на разрешающую строку, ее пометим знаком «*». На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент $s_{2^*1^*} = 8$, его выделяем полужирным шрифтом.

Переходим ко второй симплекс таблице. Разрешающий элемент табл. 1.4.1 показывает, что базисную переменную $\hat{y}_5$, стоящую в разрешающей строке, надо поменять на новую базисную переменную y_1, стоящую в разрешающем столбце. В первом столбце под $c_i^б$ изменим коэффициент целевой функции при y_1 на 1. Под новой базисной переменной y_1 запишем соответствующий единичный вектор-столбец и под прежними базисными переменными $\hat{y}_4$, $\hat{y}_6$ перепишем единичные векторы. Каждый элемент разрешающей строки разделим на разрешающий элемент $s_{i^*j^*}$ и запишем полученные элементы в строку, соответствующую разрешающей (содержащую новую базисную переменную y_1). Остальные элементы симплекс таблицы получим по «правилу прямоугольника», по формуле $t_{ij} = \dfrac{s_{i^*j^*} \cdot s_{ij} - s_{i^*j} \cdot s_{ij^*}}{s_{i^*j^*}}$. Аналогично табл. 1.4.1 находим элементы оценочной строки и оценочного столбца.

Таким образом, получим вторую симплекс-табл. 1.4.2.

Таблица 1.4.2

			1	1	1	0	0	0	
$c_i^б$	базис	b_i	y_1	y_2	y_3	$\hat{y}_4$	$\hat{y}_5$	$\hat{y}_6$	Θ_i
0	$\hat{y}_4$	4/8	0	28/8	–4/8	1	–4/8	0	1/7
1	y_1	1/8	1	5/8	9/8	0	1/8	0	1/5
0	$\hat{y}_6$	3/8	0	**23/8**	–37/8	0	–5/8	1	3/23*
	Δ_j:		0	–3/8*	1/8	0	1/8	0	

Далее аналогичным образом строим третью симплекс-табл. 1.4.3.

Таблица 1.4.3

			1	1	1	0	0	0	
$c_i^б$	базис	b_i	y_1	y_2	y_3	$\hat{y}_4$	$\hat{y}_5$	$\hat{y}_6$	Θ_i
0	$\hat{y}_4$	1/23	0	0	**118/23**	1	6/23	–28/23	1/118*
1	y_1	1/23	1	0	49/23	0	6/23	–5/23	1/49
1	y_2	3/23	0	1	–37/23	0	–5/23	8/23	–
	Δ_j:		0	0	–11/23*	0	1/23	3/23	

Заметим, что оценка Θ_3 в табл. 1.4.3 не существует ввиду того, что в разрешающем столбце на третьем месте стоит отрицательный элемент.

Затем аналогично строим последнюю симплекс-табл. 1.4.4.

Таблица 1.4.4

			1	1	1	0	0	0	
$c_i^б$	базис	b_i	y_1	y_2	y_3	$\hat{y}_4$	$\hat{y}_5$	$\hat{y}_6$	Θ_i
1	y_3	1/118	0	0	1	23/118	6/118	–28/118	
1	y_1	3/118	1	0	0	–49/118	18/118	34/118	
1	y_2	17/118	0	1	0	37/118	–16/118	–4/118	
	Δ_j:		0	0	0	11/118	8/118	2/118	

В оценочной строке табл. 1.4.4 все Δ_j неотрицательны, следовательно, симплекс метод завершен. В третьем столбце под b_i стоят компоненты оптимального решения $Y_{\max}^{\mathrm{T}} = \left(\frac{3}{118}, \frac{17}{118}, \frac{1}{118}\right)$, соответствующие базисным переменным y_1, y_2, y_3 второго столбца. А в оценочной строке последней симплекс-табл. 1.4.4 находятся компоненты оптимального решения $X_{\min}^{\mathrm{T}} = \left(\frac{11}{118}, \frac{8}{118}, \frac{2}{118}\right)$, соответствующие базисным переменным $\hat{y}_4$, $\hat{y}_5$, $\hat{y}_6$ исходной симплекс-табл. 1.4.1. Найдем значение M по формуле $M = B^{\mathrm{T}} X_{\min} = \frac{11}{118} + \frac{8}{118} + \frac{2}{118} = \frac{21}{118}$ и проверим, чтобы убедится в правильности вычислений, что $B^{\mathrm{T}} X_{\min} = C^{\mathrm{T}} Y_{\max}$. Это действительно так, потому что $C^{\mathrm{T}} Y_{\max} = \frac{3}{118} + \frac{17}{118} + \frac{1}{118} = \frac{21}{118}$.

4) Находим ситуацию равновесия в смешанных стратегиях $\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$ по формулам $\xi^* = \dfrac{X_{\min}}{M}$, $\eta^* = \dfrac{Y_{\max}}{M}$. Итак, оптимальная смешанная стратегия первого игрока $\xi^* = \left(\dfrac{11}{21},\ \dfrac{8}{21},\ \dfrac{2}{21}\right)$, а оптимальная смешанная стратегия второго игрока $\eta^* = \left(\dfrac{3}{21},\ \dfrac{17}{21},\ \dfrac{1}{21}\right)$.

5) Находим значение игры $V(A) = \dfrac{1}{M} - r = \dfrac{118}{21} - 5 = \dfrac{13}{21}$ для исходной платежной матрицы $\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: Ситуация равновесия в смешанных стратегиях $\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$, где оптимальная смешанная стратегия первого игрока $\xi^* = \left(\dfrac{11}{21},\ \dfrac{8}{21},\ \dfrac{2}{21}\right)$, а оптимальная смешанная стратегия второго игрока $\eta^* = \left(\dfrac{3}{21},\ \dfrac{17}{21},\ \dfrac{1}{21}\right)$; значение игры $V(A) = \dfrac{13}{21}$.

1.5. Основные свойства ситуации равновесия в смешанных стратегиях

В этом параграфе мы приведем лишь некоторые свойства ситуаций равновесия в смешанном расширении матричной игры.

Теорема 1.5.1 (первый критерий ситуации равновесия в смешанных стратегиях)

$\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$ является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях смешанного расширения матричной игры $\langle \Xi,\ \aleph,\ K \rangle$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) \le K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) \le K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right), \qquad (1.5.1)$$

где $i = 1,\ \ldots,\ m$, $j = 1,\ \ldots,\ n$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – это единичные векторы с единицей, стоящей на i-ом или j-ом месте соответственно.

Доказательство. Докажем необходимость. Так как $\vec{i}$ является частным случаем смешанной стратегии первого игрока, а $\vec{j}$ – смешанной стратегией второго игрока, то, подставив их в неравенства (1.4.1), из определения ситуации равновесия в смешанных стратегиях мы получим требуемые неравенства (1.5.1).

Докажем достаточность. Допустим смешанные стратегии ξ^* и η^* удовлетворяют неравенствам (1.5.1), тогда мы покажем, что $\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$ является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях. Возьмем произвольную смешанную стратегию первого игрока $\xi \in \Xi$. Используя левое неравенство из (1.5.1), получим

$$K\left(\xi,\ \eta^*\right) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) \le \sum_{i=1}^{m} \xi_i K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) = K\left(\xi^*,\ \eta^*\right). \qquad (1.5.2)$$

Возьмем произвольную смешанную стратегию второго игрока $\eta \in \aleph$. Используя правое неравенство из (1.5.1), получим

$$K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) \le \sum_{j=1}^{n} \eta_j K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right) = K\left(\xi^*,\ \eta\right). \qquad (1.5.3)$$

Объединяя оба выражения (1.5.2) и (1.5.3), мы получим неравенства

$$K\left(\xi,\ \eta^*\right) \le K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) \le K\left(\xi^*,\ \eta\right),$$

которые свидетельствуют в силу произвольности выбора $\xi \in \Xi$ и $\eta \in \aleph$, что $\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$– ситуация равновесия в смешанных стратегиях. ⊗

Замечание. Из теоремы 1.5.1 следует, что если $\left(i^*,\ j^*\right)$– ситуация равновесия в чистых стратегиях в матричной игре $\underset{m\times n}{A}$, то $\left(\vec{i}^*,\ \vec{j}^*\right)$ тоже ситуация равновесия, но в смешанных стратегиях, в смешанном расширении матричной игры.

Теорема 1.5.2 (второй критерий ситуации равновесия в смешанных стратегиях)

$\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$ является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях смешанного расширения матричной игры $\langle \Xi,\ \aleph,\ K \rangle$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\max_i K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) = \min_j K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right), \qquad (1.5.4)$$

где $i = 1,\ \ldots,\ m$, $j = 1,\ \ldots,\ n$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – это единичные векторы с единицей, стоящей на i-ом или j-ом месте соответственно.

Доказательство. Докажем необходимость. Если по условию данной теоремы $\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$ является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях, то по теореме 1.5.1 будут верны неравенства (1.5.1). «Навесим» на левое неравенство из (1.5.1) максимумы на обе части

$$\max_i K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) \le \max_i K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) = K\left(\xi^*,\ \eta^*\right). \qquad (1.5.5)$$

«Навесим» на правое неравенство из (1.5.1) минимумы на обе части

$$K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) = \min_j K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) \le \min_j K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right). \qquad (1.5.6)$$

Записывая последовательно выражения (1.5.5) и (1.5.6), получим

$$\max_i K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) \le \min_j K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right). \qquad (1.5.7)$$

Докажем методом от противного, что (1.5.7) – это равенство. Используя определение максимума и минимума, имеем

$$K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^*\, K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) \le \max_i K\left(\vec{i},\ \eta^*\right), \qquad (1.5.8)$$

$$\min_j K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right) \le \sum_{j=1}^{n} \eta_j^*\, K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right) = K\left(\xi^*,\ \eta^*\right). \qquad (1.5.9)$$

Предположим, что (1.5.7) является строгим неравенством, тогда между выражениями (1.5.8) и (1.5.9) стоит неравенство «<». Но выражение (1.5.8) начинается, а выражение (1.5.9) заканчивается одним и тем же числом $K\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$, поэтому предположение строгого неравенства приводит к противоречию: $K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) < K\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$. Итак, равенство (1.5.4) верно.

Докажем достаточность. Допустим смешанные стратегии ξ^* и η^* таковы, что для них выполнено равенство (1.5.4) при любых $i = 1,\ \ldots,\ m$, $j = 1,\ \ldots,\ n$. К тому же в силу определения смешанной стратегии выполнены условия

$$\xi_i^* \ge 0,\ i = 1,\ \ldots,\ m; \qquad \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* = 1; \qquad (1.5.10)$$

$$\eta_j^* \ge 0,\ j = 1,\ \ldots,\ n; \qquad \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* = 1. \qquad (1.5.11)$$

Докажем, что $\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$ является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях. По определению минимума

$$\min_j K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right) \le K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right),\ \ j = 1,\ \ldots,\ n. \qquad (1.5.12)$$

Если мы умножим обе части неравенства (1.5.12) на числа $\eta_j^* \geq 0$ (т.к. верно (1.5.11)), то получим

$$\eta_j^* \min_j K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right) \leq \eta_j^* K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right),\quad j=1,\ \ldots,\ n. \tag{1.5.13}$$

Просуммируем по j неравенства (1.5.13) , учитывая из (1.5.11): $\sum_{j=1}^{n} \eta_j^* = 1$, а $\min_j K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right)$ – это константа, независимая от j, получим

$$\min_j K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right) = K\left(\xi^*,\ \eta^*\right). \tag{1.5.14}$$

По определению максимума

$$K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) \leq \max_i K\left(\vec{i},\ \eta^*\right),\quad i=1,\ \ldots,\ m. \tag{1.5.15}$$

Если мы умножим обе части неравенства (1.5.15) на числа $\xi_i^* \geq 0$ (т.к. верно (1.5.10)), то получим

$$\xi_i^* K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) \leq \xi_i^* \max_i K\left(\vec{i},\ \eta^*\right),\quad i=1,\ \ldots,\ m. \tag{1.5.16}$$

Просуммируем по i неравенства (1.5.16) , учитывая из (1.5.10): $\sum_{i=1}^{m} \xi_i^* = 1$, $\max_i K\left(\vec{i},\ \eta^*\right)$ – это константа, независимая от i, получим

$$K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) \leq \max_i K\left(\vec{i},\ \eta^*\right). \tag{1.5.17}$$

Записывая друг за другом выражения (1.5.14) и (1.5.17) и учитывая равенство (1.5.4), мы видим, что в (1.5.14) и (1.5.17) стоят только равенства. Таким образом мы получаем, что

$$\max_i K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) = K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) = \min_j K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right). \tag{1.5.18}$$

Принимая во внимание (1.5.15) и (1.5.12), имеем из (1.5.18)

$$K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) \leq \max_i K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) = K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) = \min_j K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right) \leq K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right),$$

где $i=1,\ \ldots,\ m$, $j=1,\ \ldots,\ n$. Итак, выполнены неравенства теоремы 1.5.1, это свидетельствует о том, что $\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$ – ситуация равновесия в смешанных стратегиях. ⊗

Следствие 1.5.1. *В смешанном расширении матричной игры выполнено равенство*

$$\max_{\xi} \min_j K\left(\xi,\ \vec{j}\right) = \min_{\eta} \max_i K\left(\vec{i},\ \eta\right) = V(A), \tag{1.5.19}$$

где $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$, *причем экстремумы по смешанным стратегиям* ξ *и* η *в* (1.5.19) *достигаются на оптимальных смешанных стратегиях игроков.*

Теорема 1.5.3 (о дополняющей нежесткости)

Пусть $\left(\xi^*, \eta^*\right)$ *– ситуация равновесия в смешанных стратегиях смешанного расширения матричной игры,* $V(A)=K\left(\xi^*, \eta^*\right)$*– значение игры. Тогда для любого i, при котором* $K\left(\vec{i}, \eta^*\right)<V(A)$, *имеет место равенство* $\xi_i^*=0$; *а для любого j такого, что* $K\left(\xi^*, \vec{j}\right)>V(A)$, *выполнено* $\eta_j^*=0$. *И обратно, если* $\xi_i^*>0$, *то* $K\left(\vec{i}, \eta^*\right)=V(A)$, *а если* $\eta_j^*>0$, *то имеет место равенство* $K\left(\xi^*, \vec{j}\right)=V(A)$.

<u>Доказательство</u>. Допустим от противного, что для некоторого i_0, для которого

$$K\left(\vec{i}_0, \eta^*\right)<V(A), \tag{1.5.20}$$

имеет место неравенство $\xi_{i_0}^* \neq 0$. Так как по определению смешанной стратегии $\xi_{i_0}^* \geq 0$, и предположения $\xi_{i_0}^* \neq 0$, мы имеем $\xi_{i_0}^*>0$, то из неравенства (1.5.20) получим

$$\xi_{i_0}^* K\left(\vec{i}_0, \eta^*\right)<\xi_{i_0}^* V(A). \tag{1.5.21}$$

В силу того, что $\xi_i^* \geq 0$ при всех остальных $i=1, \ldots, m$, и выполнено левое неравенство теоремы 1.5.1:

$$K\left(\vec{i}, \eta^*\right) \leq K\left(\xi^*, \eta^*\right)=V(A), \tag{1.5.22}$$

то из (1.5.22) при всех $i=1, \ldots, m$, $i \neq i_0$, будем иметь

$$\xi_i^* K\left(\vec{i}, \eta^*\right) \leq \xi_i^* V(A). \tag{1.5.23}$$

Просуммируем по $i=1, \ldots, m$ все неравенства вида (1.5.23) и (1.5.21), тогда, учитывая что $\sum_{i=1}^m \xi_i^*=1$, получим противоречие:

$$V(A)=K\left(\xi^*, \eta^*\right)=\sum_{i=1}^m \xi_i^* K\left(\vec{i}, \eta^*\right)<\sum_{i=1}^m \xi_i^* V(A)=V(A).$$

Аналогично доказывается результат для второго игрока.

Теперь докажем методом от противного вторую часть теоремы, а именно, что если $\xi_i^*>0$, то $K\left(\vec{i}, \eta^*\right)=V(A)$. Если допустить, что

$K\left(\vec{i},\ \eta^*\right) < V(A)$, то $V(A) = K\left(\xi^*,\ \eta^*\right) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* K\left(\vec{i}, \eta^*\right) < \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* V(A) = V(A)$.

Такого быть не может, следовательно, наше предположение неверно. Аналогично доказывается результат для $\eta_j^* > 0$. $\otimes$

1.6. Игры с матрицей второго порядка

Оптимальное решение для матричных игр, в которых платежная матрица имеет второй порядок, находится по особым формулам.

Если игра задана платежной матрицей $\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, и отсутствуют седловые точки, то обе ***чистые стратегии*** игроков являются ***активными***, то есть они выбираются с положительными вероятностями.

Обозначим через $\left(p_1,\ p_2\right)$ оптимальную смешанную стратегию первого игрока, а через $\left(q_1,\ q_2\right)$ – оптимальную смешанную стратегию второго игрока, через V – значение игры.

Если первый игрок придерживается своей оптимальной смешанной стратегии $\left(p_1,\ p_2\right)$, а второй игрок применяет свою активную стратегию под номером 1, то по теореме 1.5.3 выигрыш первого игрока в такой ситуации равен значению игры V. Таким образом, мы получим уравнение $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = V$. Если первый игрок применяет оптимальную смешанную стратегию $\left(p_1,\ p_2\right)$, а второй игрок – активную стратегию под номером 2, то выигрыш первого игрока опять равен V, и мы имеем еще одно уравнение $a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = V$. Учитывая, что смешанные стратегии должны удовлетворять условию $p_1 + p_2 = 1$, мы получим систему трех уравнений с тремя неизвестными $p_1,\ p_2,\ V$

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = V \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = V \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},\quad p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{1.6.1}$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (1.6.2)$$

Аналогично, применяя теорему 1.5.3 ко второму игроку, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = V \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = V \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

и, решив ее, найдем, что

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (1.6.3)$$

Задача 1.6.1. Дана платежная матрица $\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Найти ситуацию равновесия и значение данной игры.

Решение: Найдем нижнюю и верхнюю цену игры по формулам из задач 1.2.1 и 1.2.2, получим $\underline{v} = 3$, $\overline{v} = 5$. Так как нижняя цена не совпадает с верхней, то по теореме 1.3.4 не существует ситуаций равновесия в чистых стратегиях. Рассмотрим смешанное расширение матричной игры и найдем по формулам 1.6.1.и 1.6.3 ситуацию равновесия в смешанных стратегиях

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{7-3}{5+7-0-3} = \frac{4}{9}, \quad p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{5-0}{9} = \frac{5}{9};$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{7-0}{9} = \frac{7}{9}, \quad q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{5-3}{9} = \frac{2}{9}.$$

Заметим, что достаточно запомнить формулы для вычислений только первых компонент p_1 и q_1, а вторые компоненты можно искать по формулам

$$p_2 = 1 - p_1 \text{ и } q_2 = 1 - q_1.$$

Найдем значение игры по формуле 1.6.2

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{5\cdot 7 - 0\cdot 3}{9} = \frac{35}{9}.$$

Ответ: Ситуация равновесия в смешанных стратегиях (ξ^*, η^*), где $\xi^* = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$ и $\eta^* = \left(\frac{7}{9}, \frac{2}{9}\right)$, а значение игры $V(A) = \frac{35}{9}$.

1.7. Игры с матрицами размерности $2\times n$ и $m\times 2$

Если игра задана платежной матрицей размерности $2\times n$ или $m\times 2$, и отсутствуют ситуации равновесия в чистых стратегиях, то ситуацию равновесия в смешанных стратегиях можно найти графоаналитическим методом. Данный метод основан на свойствах выпуклых множеств, теореме 1.5.3 и следствии 1.5.1.

Пример 1.7.1. Рассмотрим игру с платежной матрицей $\underset{2\times n}{A}$ размерности $2\times n$, в которой не существует седловых точек, и, следовательно, обе чистые стратегии первого игрока являются активными.

Допустим, первый игрок выбирает смешанную стратегию $\xi=(x,\ 1-x)$, где $0<x<1$, а второй игрок выбирает чистую стратегию под номером j, $j=1,\ \ldots,\ n$. Тогда выигрыш первого игрока в ситуации $(\xi,\ \vec{j})$ составит

$$K(\xi,\ \vec{j})=a_{1j}x+a_{2j}(1-x). \qquad (1.7.1)$$

Геометрически уравнение (1.7.1) задает прямую в Декартовой системе координат с переменными x и K. Таким образом, мы получим n прямых, вида (1.7.1), нижняя огибающая которых является графиком функции $L(x)=\min\limits_{1\le j\le n}K(\xi,\ \vec{j})$. Значение $x_{\max}$, на котором достигается максимум функции $L(x)$, приведет к оптимальной смешанной стратегии первого игрока $\xi^*=(x_{\max},\ 1-x_{\max})$, для нее по следствию 1.5.1

$$L(x_{\max})=\min_j K(\xi^*,\ \vec{j})=\max_{\xi}\min_j K(\xi,\ \vec{j})=V(A). \qquad (1.7.2)$$

Для всех прямых вида (1.7.1), не проходящих через точку $(x_{\max},\ L(x_{\max}))$, $K(\xi^*,\ \vec{j})>V(A)$, следовательно, по теореме 1.5.3 $\eta_j^*=0$, здесь j пробегает все номера от 1 до n кроме номеров прямых, пересекающихся в точке $(x_{\max},\ L(x_{\max}))$, и $\eta^*=(\eta_1^*,\ \ldots,\ \eta_n^*)$ – оптимальная смешанная стратегия второго игрока.

В силу того, что обе компоненты оптимальной смешанной стратегии первого игрока положительны, по теореме 1.5.3 можно утверждать, что $K(\vec{i},\ \eta^*)=V(A)$, $i=1,\ 2$. Решая систему этих линейных уравнений и учитывая нулевые компоненты, мы получим η^*. Таким образом, мы нашли ситуацию равновесия в смешанных стратегиях $(\xi^*,\ \eta^*)$ и значение игры $V(A)$.

Пример 1.7.2. Рассмотрим игру с платежной матрицей $\underset{m\times 2}{A}$ размерности $m\times 2$, в которой не существует седловых точек, и, следовательно, обе чистые стратегии второго игрока являются активными. Решение данной игры проводим аналогично решению в примере 1.7.1.

Допустим, второй игрок выбирает смешанную стратегию $\eta=(y,\ 1-y)$, где $0<y<1$, а первый игрок выбирает чистую стратегию под номером i, $i=1,\ \ldots,\ m$. Тогда выигрыш первого игрока в ситуации $(\vec{i},\ \eta)$ равен

$$K(\vec{i},\ \eta)=a_{i1}y+a_{i2}(1-y). \qquad (1.7.3)$$

Геометрически уравнение (1.7.3) задает прямую в Декартовой системе координат с переменными y и K. Таким образом, мы получим m прямых, вида (1.7.3), верхняя огибающая которых является графиком функции $M(y)=\max\limits_{1\le i\le m}K(\vec{i},\ \eta)$. Значение $y_{\min}$, на котором достигается минимум функции $M(y)$, приводит к оптимальной смешанной стратегии второго игрока $\eta^*=(y_{\min},\ 1-y_{\min})$, для нее по следствию 1.5.1

$$M(y_{\min})=\max_i K(\vec{i},\ \eta^*)=\min_\eta\max_i K(\vec{i},\ \eta)=V(A). \qquad (1.7.4)$$

Для всех прямых вида (1.7.3), не проходящих через точку $(y_{\min},\ M(y_{\min}))$, $K(\vec{i},\ \eta^*)<V(A)$, следовательно, по теореме 1.5.3 $\xi_i^*=0$, здесь i пробегает все номера от 1 до m кроме номеров прямых, пересекающихся в точке $(y_{\min},\ M(y_{\min}))$, и $\xi^*=(\xi_1^*,\ \ldots,\ \xi_m^*)$ – оптимальная смешанная стратегия первого игрока.

Ввиду того, что обе компоненты оптимальной смешанной стратегии второго игрока положительны, по теореме 1.5.3 можно утверждать, что $K(\xi^*,\ \vec{j})=V(A)$, $j=1,\ 2$. Решая систему этих линейных уравнений и учитывая нулевые компоненты, мы получим ξ^*. Заметим, что дополнительно можно учитывать условие $\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i^*=1$. Таким образом, мы найдем ситуацию равновесия в смешанных стратегиях $(\xi^*,\ \eta^*)$ и значение игры $V(A)$.

Задача 1.7.1. Найти ситуацию равновесия и цену игры с платежной матрицей $\underset{2\times 3}{A}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 3\\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

Решение: Вычислив нижнюю и верхнюю цену игры $\underline{v} = 3$, $\overline{v} = 5$, убеждаемся, что отсутствуют ситуации равновесия в чистых стратегиях.

В силу того, что платежная матрица имеет всего две строки, решим задачу графоаналитическим методом.

Так как нет седловых точек, то обе чистые стратегии первого игрока являются активными.

Если первый игрок выберет смешанную стратегию $\xi = (x,\ 1-x)$, где $0 < x < 1$, а второй игрок – чистую стратегию под первым номером, то выигрыш первого игрока в ситуации $(\xi,\ \vec{1})$ составит $K_1 = K(\xi,\ \vec{1})$ единиц, причем по формуле (1.7.1) $K(\xi,\ \vec{1}) = 5x + 4(1-x)$, т. е.

$$K = x + 4. \tag{1.7.5}$$

Геометрически уравнение (1.7.5) можно задать прямой в Декартовой системе координат с переменными x и K. Обозначим эту прямую на рис. 1.7.1 через K_1.

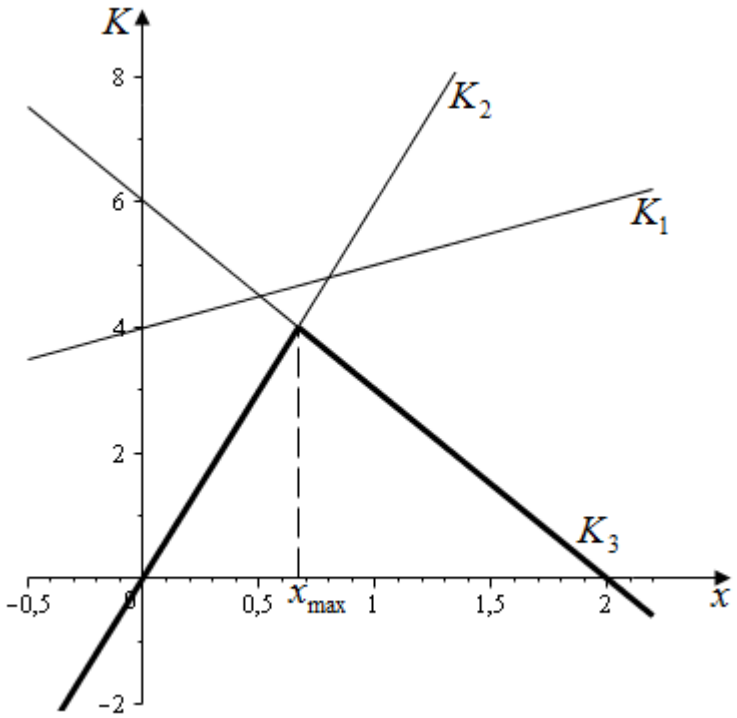

Рис. 1.7.1

Аналогично, если второй игрок выберет вторую чистую стратегию, то выигрыш первого игрока в ситуации $(\xi,\ \vec{2})$ составит $K_2 = K(\xi,\ \vec{2})$ единиц, и по формуле (1.7.1) $K(\xi,\ \vec{2}) = 6x + 0(1-x)$, т. е.

$$K = 6x. \tag{1.7.6}$$

На рис. 1.7.1 обозначим прямую, график уравнения (1.7.6), через K_2. В случае если второй игрок выберет третью чистую стратегию, то выигрыш в ситуации $\left(\xi,\ \vec{3}\right)$ составит $K_3 = K\left(\xi,\ \vec{3}\right)$ единиц, и по формуле (1.7.1) $K\left(\xi,\ \vec{3}\right) = 3x + 6(1-x)$, т. е.

$$K = 6 - 3x. \tag{1.7.7}$$

Обозначим прямую, график уравнения (1.7.7), на рис. 1.7.1 через K_3. Таким образом, мы получили три прямые, вида (1.7.1), нижняя огибающая которых является графиком функции $L(x) = \min\limits_{1 \le j \le 3} K\left(\xi,\ \vec{j}\right)$. Нижняя огибающая на рис. 1.7.1 выделена жирным шрифтом. Значение $x_{\max}$, на котором достигается максимум функции $L(x)$, приводит к оптимальной смешанной стратегии первого игрока $\xi^* = \left(x_{\max},\ 1 - x_{\max}\right)$. Найдем $x_{\max}$, решая систему двух уравнений, которые соответствуют графикам пересекающихся в точке $\left(x_{\max},\ L\left(x_{\max}\right)\right)$ прямых K_2 и K_3.

$$\begin{cases} K = 6x \\ K = 6 - 3x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 6x = 6 - 3x \quad \Leftrightarrow \quad x_{\max} = \frac{2}{3}.$$

Итак, оптимальная смешанная стратегия первого игрока $\xi^* = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$.

Значение игры $V(A)$ найдем из формулы (1.7.2)

$$V(A) = L\left(x_{\max}\right) = 6x_{\max} = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4.$$

Заметим, что для каждого j_0, для которого выполнено неравенство $K\left(\xi^*,\ \vec{j}_0\right) > V(A)$, по теореме 1.5.3 $\eta^*_{j_0} = 0$, где $\eta^* = \left(\eta^*_1,\ \ldots,\ \eta^*_n\right)$ – оптимальная смешанная стратегия второго игрока. Действительно

$$K\left(\xi^*,\ \vec{1}\right) = x_{\max} + 4 = \frac{2}{3} + 4 = 4\frac{2}{3} > 4,$$

следовательно $\eta^*_1 = 0$. Ввиду того, что прямые K_2 и K_3 пересекаются как раз в точке $\left(x_{\max},\ L\left(x_{\max}\right)\right)$, то $K\left(\xi^*,\ \vec{2}\right) = K\left(\xi^*,\ \vec{3}\right) = V(A)$.

Принимая во внимание $\eta^*_1 = 0$ и вид платежной матрицы, воспользуемся теоремой 1.5.3 и свойством смешанной стратегии, решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \eta_1^* = 0 \\ K\left(\vec{2},\ \eta^*\right) = V(A) \\ \sum_{j=1}^{3} \eta_j^* = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_1^* = 0 \\ 6\eta_3^* = 4 \\ \eta_2^* = 1 - \eta_3^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_1^* = 0 \\ \eta_2^* = \dfrac{1}{3} \\ \eta_3^* = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Таким образом, мы нашли ситуацию равновесия в смешанных стратегиях $\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$ и значение игры $V(A)$.

Ответ: Ситуация равновесия в смешанных стратегиях $\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$, в которой оптимальная смешанная стратегия первого игрока $\xi^* = \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$, а оптимальная смешанная стратегия второго игрока $\eta^* = \left(0,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$, и значение игры $V(A) = 4$.

Задача 1.7.2. Найти ситуацию равновесия и цену игры с платежной матрицей $\underset{4\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение: Нижнее и верхнее значение игры $\underline{v} = 3$, $\overline{v} = 5$ не совпадают, следовательно, не существуют ситуации равновесия в чистых стратегиях.

Так как платежная матрица имеет всего два столбца, решим задачу графоаналитическим методом.

Все чистые стратегии второго игрока являются активными, потому что отсутствуют седловые точки.

Когда второй игрок выбирает смешанную стратегию $\eta = (y,\ 1-y)$, где $0 < y < 1$, а первый игрок – чистую стратегию под номером 1, тогда выигрыш первого игрока в ситуации $\left(\vec{1},\ \eta\right)$ равен $K_1 = K\left(\vec{1},\ \eta\right)$ единиц, причем по формуле (1.7.3) $K\left(\vec{1},\ \eta\right) = 2y + 6(1-y)$, т. е.

$$K = 6 - 4y. \qquad (1.7.8)$$

Геометрически уравнение (1.7.8) определяет прямую в Декартовой системе координат с переменными y и K. Обозначим эту прямую на рис. 1.7.2 через K_1.

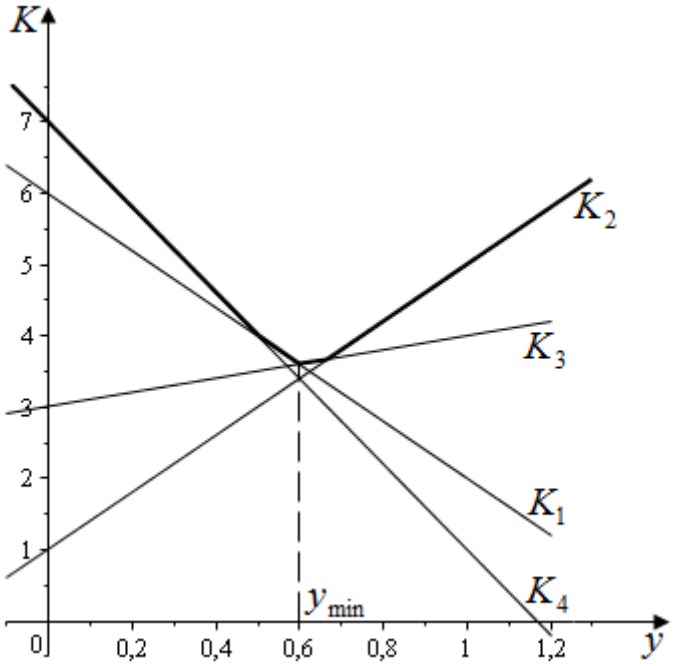

Рис. 1.7.2

Если первый игрок выбирает вторую чистую стратегию, то выигрыш первого игрока в ситуации $\left(\vec{2},\ \eta\right)$ составит $K_2 = K\left(\vec{2},\ \eta\right)$ единиц, и по формуле (1.7.3) $K\left(\vec{2},\ \eta\right) = 5 \cdot y + 1 \cdot (1 - y)$, т. е.

$$K = 4y + 1. \qquad (1.7.9)$$

На рис. 1.7.2 обозначим прямую, график уравнения (1.7.9), через K_2. Аналогично, если первый игрок выберет третью чистую стратегию, то выигрыш первого игрока в ситуации $\left(\vec{3},\ \eta\right)$ составит $K_3 = K\left(\vec{3},\ \eta\right)$ единиц, и по формуле (1.7.3) $K\left(\vec{3},\ \eta\right) = 4y + 3(1 - y)$, т. е.

$$K = y + 3. \qquad (1.7.10)$$

На рис. 1.7.2 обозначим прямую, график уравнения (1.7.10), через K_3. В случае если первый игрок выбирает четвертую чистую стратегию, выигрыш в ситуации $\left(\vec{4},\ \eta\right)$ составит $K_4 = K\left(\vec{4},\ \eta\right)$ единиц, и по формуле (1.7.3) $K\left(\vec{4},\ \eta\right) = y + 7(1 - y)$, т. е.

$$K = 7 - 6y. \qquad (1.7.11)$$

Обозначим прямую, график уравнения (1.7.11), на рис. 1.7.2 через K_4. Итак, мы имеем четыре прямые, вида (1.7.3), верхняя огибающая которых

является графиком функции $M(y)=\max\limits_{1\le i\le 4}K(\vec{i},\ \eta)$. Верхняя огибающая на рис. 1.7.2 выделена жирным шрифтом. Значение $y_{\min}$, на котором достигается минимум функции $M(y)$, приводит к оптимальной смешанной стратегии второго игрока $\eta^*=(y_{\min},\ 1-y_{\min})$. Найдем $y_{\min}$, решая систему двух уравнений, которые соответствуют графикам пересекающихся в точке $(y_{\min},\ M(y_{\min}))$ прямых K_1 и K_3.

$$\begin{cases} K=6-4y \\ K=y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 6-4y=y+3 \quad \Leftrightarrow \quad y_{\min}=\frac{3}{5}.$$

Итак, оптимальная смешанная стратегия второго игрока $\eta^*=\left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5}\right)$.

Значение игры $V(A)$ найдем из формулы (1.7.4)

$$V(A)=M(y_{\min})=y_{\min}+3=\frac{3}{5}+3=3\frac{3}{5}.$$

Заметим, что для всех прямых вида (1.7.3), не проходящих через точку $(y_{\min},\ M(y_{\min}))$, $K(\vec{i},\ \eta^*)<V(A)$, следовательно, по теореме 1.5.3 $\xi_i^*=0$, где $\xi^*=(\xi_1^*,\ \ldots,\ \xi_m^*)$ – оптимальная смешанная стратегия первого игрока.

Не пересекают точку $\left(\frac{3}{5},\ 3\frac{3}{5}\right)$ прямые K_2 и K_4, поэтому $\xi_2^*=0$ *и* $\xi_4^*=0$. Так как обе компоненты оптимальной смешанной стратегии второго игрока положительны, то по теореме 1.5.3 можно утверждать, что $K(\xi^*,\ \vec{j})=V(A)$, $j=1,\ 2$. Учитывая данные факты и свойство смешанной стратегии, составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_2^*=0 \\ \xi_4^*=0 \\ K(\xi^*,\ \vec{1})=V(A) \\ \sum\limits_{i=1}^{4}\xi_i^*=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_2^*=0 \\ \xi_4^*=0 \\ 2\xi_1^*+4\xi_3^*=3{,}6 \\ \xi_1^*+\xi_3^*=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1^*=0{,}2 \\ \xi_2^*=0 \\ \xi_3^*=0{,}8 \\ \xi_4^*=0 \end{cases}.$$

Ответ: Значение игры $V(A)=3{,}6$ и оптимальные смешанные стратегии первого игрока $\xi^*=(0{,}2;\ 0;\ 0{,}8;\ 0)$ и второго игрока $\eta^*=(0{,}6;\ 0{,}4)$ образуют ситуацию равновесия в смешанных стратегиях $(\xi^*,\ \eta^*)$.

1.8. Доминируемые стратегии

Говорят, что ***стратегия первого игрока*** ξ' ***доминирует*** стратегию ξ'' в смешанном расширении матричной игры, если для любого $j=1,\ldots,n$ выполняется неравенство $K\left(\xi',\ \vec{j}\right)\geq K\left(\xi'',\ \vec{j}\right)$, в этом случае ξ' называют ***доминирующей***, а ξ'' – ***доминируемой стратегией первого игрока***.

Говорят, что ***стратегия второго игрока*** η' ***доминирует*** стратегию η'' в смешанном расширении матричной игры, если для любого $i=1,\ldots,m$ выполняется неравенство $K\left(\vec{i},\ \eta'\right)\leq K\left(\vec{i},\ \eta''\right)$, в этом случае η' называют ***доминирующей***, а η'' – ***доминируемой стратегией второго игрока***.

Если неравенства выполняются как строгие, то говорят о ***строгом доминировании***.

Для чистых стратегий введенные определения трансформируются следующим образом.

Если ***чистая стратегия*** k ***первого игрока доминирует*** стратегию i, то для всех $j=1,\ldots,n$ выполняются неравенства $a_{kj}\geq a_{ij}$.

Если ***чистая стратегия*** k ***второго игрока доминирует*** стратегию j, то для всех $i=1,\ldots,m$ выполняются неравенства $a_{ik}\leq a_{ij}$.

Теорема 1.8.1 (связь оптимальных и доминирующих стратегий)

Если в смешанном расширении матричной игры стратегия первого игрока ξ' доминирует оптимальную стратегию ξ^*, то стратегия ξ' тоже оптимальная. И аналогично, если стратегия второго игрока η' доминирует оптимальную стратегию η^*, то стратегия η' тоже оптимальная.

<u>Доказательство</u>. Допустим, ξ' доминирует оптимальную стратегию ξ^*, тогда по определению доминирования

$$K\left(\xi',\ \vec{j}\right)\geq K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right),\ j=1,\ldots,n. \tag{1.8.1}$$

«Навесим» минимумы на обе части неравенства (1.8.1)

$$\min_{1\leq j\leq n} K\left(\xi',\ \vec{j}\right)\geq \min_{1\leq j\leq n} K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right). \tag{1.8.2}$$

Так как ξ^* – оптимальная стратегия, то по следствию 1.5.1 выполняется равенство

$$\max_{\xi}\min_{1\leq j\leq n} K\left(\xi,\ \vec{j}\right)=\min_{1\leq j\leq n} K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right). \tag{1.8.3}$$

По определению максимума

$$\max_{\xi}\min_{1\le j\le n}K\left(\xi,\ \vec{j}\right)\ge\min_{1\le j\le n}K\left(\xi',\ \vec{j}\right). \qquad (1.8.4)$$

Если мы запишем выражения (1.8.4), (1.8.2), (1.8.3), то получим

$$\max_{\xi}\min_{1\le j\le n}K\left(\xi,\ \vec{j}\right)\ge\min_{1\le j\le n}K\left(\xi',\ \vec{j}\right)\ge\min_{1\le j\le n}K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right)=\max_{\xi}\min_{1\le j\le n}K\left(\xi,\ \vec{j}\right).$$

Таким образом мы доказали, что $\min_{1\le j\le n}K\left(\xi',\ \vec{j}\right)=\max_{\xi}\min_{1\le j\le n}K\left(\xi,\ \vec{j}\right)=V\left(A\right)$, то есть ξ' тоже оптимальная стратегия первого игрока. Для второго игрока доказательство проводится аналогично. ⊗

Теорема 1.8.2 (о недоминируемых строго стратегиях)

Если в смешанном расширении матричной игры стратегия первого игрока ξ^* оптимальна, то она недоминируема строго, то есть не существует никакой другой стратегии, которая строго доминирует ξ^*. И аналогично, если стратегия второго игрока η^* оптимальна, то она недоминируема строго.

<u>Доказательство</u>. Допустим от противного, что существует стратегия первого игрока ξ', которая строго доминирует оптимальную стратегию ξ^*, тогда по определению строгого доминирования

$$K\left(\xi',\ \vec{j}\right)>K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right),\ j=1,\ldots,\ n. \qquad (1.8.5)$$

«Навесим» минимумы на обе части неравенства (1.8.5):

$$\min_{1\le j\le n}K\left(\xi',\ \vec{j}\right)>\min_{1\le j\le n}K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right). \qquad (1.8.6)$$

Но так как ξ^* – оптимальная стратегия, то по следствию 1.5.1 выполняется равенство (1.8.3), а по определению максимума выполнено неравенство (1.8.4). Если мы запишем выражения (1.8.4), (1.8.6), (1.8.3), то получим

$$\max_{\xi}\min_{1\le j\le n}K\left(\xi,\ \vec{j}\right)\ge\min_{1\le j\le n}K\left(\xi',\ \vec{j}\right)>\min_{1\le j\le n}K\left(\xi^*,\ \vec{j}\right)=\max_{\xi}\min_{1\le j\le n}K\left(\xi,\ \vec{j}\right).$$

Итак, мы получили противоречие: $\max_{\xi}\min_{1\le j\le n}K\left(\xi,\ \vec{j}\right)>\max_{\xi}\min_{1\le j\le n}K\left(\xi,\ \vec{j}\right)$. Следовательно, наше предположение неверно, и ξ^* недоминируема строго. Для оптимальной стратегии второго игрока доказательство проводится аналогично. ⊗

Замечание. Обратное теореме 1.8.2 утверждение неверно.

Пример 1.8.1. В матричной игре $\underset{2\times 2}{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ обе чистые стратегии первого игрока являются недоминируемыми строго, но они не являются оптимальными. Доказательство данного утверждения предоставляется читателю.

Теоремы 1.8.1 и 1.8.2 позволяют не рассматривать доминируемые стратегии в качестве оптимальных.

Принцип доминирования состоит в том, что игрок не должен использовать с положительной вероятностью те чистые стратегии, применяя которые, он при любых действиях другого игрока выигрывает меньше, чем при использовании некоторой другой стратегии. Таким образом, доминируемые чистые стратегии не могут быть активными.

Прежде чем формулировать об этом теорему, введем новое понятие.

Расширением смешанной стратегии первого игрока $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ ***на i-м месте*** назовем вектор $\xi^i = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, 0, \xi_i, \ldots, \xi_m)$, длина которого на единицу больше исходного вектора ξ.

Расширением смешанной стратегии второго игрока $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ ***на j-м месте*** назовем вектор $\eta^j = (\eta_1, \ldots, \eta_{j-1}, 0, \eta_j, \ldots, \eta_n)$, длина которого на единицу больше исходного вектора η.

Теорема 1.8.3 (о подыгре)

Пусть в матричной игре $\underset{m\times n}{A}$ *доминируема* i*-я чистая стратегия первого игрока, а матрица* $\underset{(m-1)\times n}{A'}$ *получена из* $\underset{m\times n}{A}$ *вычеркиванием* i*-й строки. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $V(A) = V(A')$.

2) *Любая оптимальная стратегия второго игрока* η^* *в смешанном расширении игры с матрицей* $\underset{(m-1)\times n}{A'}$ *является оптимальной в игре* $\underset{m\times n}{A}$.

3) *Если* ξ^* *– оптимальная стратегия первого игрока в смешанном расширении игры с матрицей* $\underset{(m-1)\times n}{A'}$, *то* $(\xi^*)^i$, *расширение* ξ^* *на* i*-м месте, является оптимальной стратегией в игре* $\underset{m\times n}{A}$.

Аналогично для второго игрока, если в матричной игре $\underset{m\times n}{A}$ *доминируема* j*-я чистая стратегия второго игрока, а матрица* $\underset{m\times(n-1)}{A''}$ *получена из* $\underset{m\times n}{A}$ *вычеркиванием* j*-го столбца, то справедливы следующие утверждения:*

4) $V(A) = V(A'')$.

5) *Любая оптимальная стратегия первого игрока* ξ^* *в смешанном расширении матричной игры* $\underset{m\times(n-1)}{A''}$ *является оптимальной в игре* $\underset{m\times n}{A}$.

6) *Если* η^* *– оптимальная стратегия второго игрока в смешанном расширении игры с матрицей* $\underset{m\times(n-1)}{A''}$, *то* $\left(\eta^*\right)^j$, *расширение* η^* *на j-м месте, является оптимальной стратегией в игре* $\underset{m\times n}{A}$.

<u>Доказательство</u>. Не нарушая общности, предположим, что доминируемой является последняя *m*-я стратегия первого игрока, а ее доминирует стратегия ξ'. Рассмотрим два возможных случая. Случай 1: последняя *m*-я компонента стратегии ξ' равна нулю. Так как ξ' – смешанная стратегия, то для нее выполнены условия

$$\sum_{i=1}^{m-1}\xi'_i=1,\quad \xi'_i\geq 0,\ i=1,\ \ldots,\ m-1. \tag{1.8.7}$$

Если $\xi'_m=0$, то из определения доминирования для всех $j=1,\ldots,\ n$ получаем

$$K\left(\xi',\ \vec{j}\right)=\sum_{i=1}^{m-1}\xi'_i a_{ij}\geq a_{mj}=K\left(\vec{m},\ \vec{j}\right). \tag{1.8.8}$$

Случай 2. Если $\xi'_m>0$, то рассмотрим вектор ξ'', в котором

$$\xi''_i=\begin{cases}\xi'_i/\left(1-\xi'_m\right), & i\neq m,\\ 0, & i=m.\end{cases} \tag{1.8.9}$$

Заметим, что вектор ξ'' удовлетворяет условиям, аналогичным (1.8.7):

$$\sum_{i=1}^{m-1}\xi''_i=1,\quad \xi''_i\geq 0,\ i=1,\ \ldots,\ m-1. \tag{1.8.10}$$

Из условия, что ξ' доминирует стратегию *m*, получим для $j=1,\ldots,\ n$

$$K\left(\xi',\ \vec{j}\right)=\sum_{i=1}^{m}\xi'_i a_{ij}\geq\sum_{i=1}^{m}\xi'_i a_{mj}=a_{mj}=K\left(\vec{m},\ \vec{j}\right). \tag{1.8.11}$$

Из (1.8.11), учитывая, что $1/\left(1-\xi'_m\right)>0$, а при $i=m$ слагаемые в левой и правой части неравенства (1.8.11) совпадают, имеем

$$\frac{1}{1-\xi'_m}\sum_{i=1}^{m-1}\xi'_i a_{ij}\geq\frac{1}{1-\xi'_m}\sum_{i=1}^{m-1}\xi'_i a_{mj}. \tag{1.8.12}$$

Вспоминая запись (1.8.9), перепишем (1.8.12) в виде

$$\sum_{i=1}^{m-1}\xi''_i a_{ij}\geq\sum_{i=1}^{m-1}\xi''_i a_{mj}. \tag{1.8.13}$$

Учитывая условие (1.8.10) и независимость a_{mj} от переменной суммирования i, получаем из (1.8.13)

$$\sum_{i=1}^{m-1} \xi_i'' a_{ij} \geq a_{mj}, \; j = 1, \ldots, n. \qquad (1.8.14)$$

Таким образом, выражения (1.8.8), (1.8.7), (или (1.8.14), (1.8.10)) доказывают, что если m-я стратегия первого игрока доминируема, то m-я строка не превосходит выпуклую линейную комбинацию остальных строк.

Обозначим $K'(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \eta_j$. Пусть (ξ^*, η^*) является ситуацией равновесия в смешанном расширении матричной игры $\underset{(m-1)\times n}{A'}$, то есть по теореме 1.5.1 выполняются неравенства

$$K'(\vec{i}, \eta^*) \leq K'(\xi^*, \eta^*) \leq K'(\xi^*, \vec{j}) \qquad (1.8.15)$$

для всех $i = 1, \ldots, m-1$, $j = 1, \ldots, n$; тогда требуется доказать, что имеют место неравенства

$$K(\vec{i}, \eta^*) \leq K\left((\xi^*)^m, \eta^*\right) \leq K\left((\xi^*)^m, \vec{j}\right) \qquad (1.8.16)$$

для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

В расширении ξ^* на m-м месте последняя компонента вектора $(\xi^*)^m$ равна нулю, поэтому

$$K\left((\xi^*)^m, \eta^*\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\xi_i^*)^m \eta_j^* = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_i^* \eta_j^* = K'(\xi^*, \eta^*) = V(A'). \qquad (1.8.17)$$

Так как при $i = 1, \ldots, m-1$ имеем $K(\vec{i}, \eta^*) = K'(\vec{i}, \eta^*)$ и выполняются (1.8.17) и (1.8.15), то левые неравенства из (1.8.16) выполняются для всех $i = 1, \ldots, m-1$. Докажем левое неравенство из (1.8.16) при $i = m$. Условие (1.8.10) говорит о том, что в случае 2 вектор $(\xi_1'', \ldots, \xi_{m-1}'')$ является смешанной стратегией в смешанном расширении игры $\underset{(m-1)\times n}{A'}$. С учетом выполнения (1.8.14), (1.8.17) и определения ситуации равновесия в смешанных стратегиях мы получим требуемое:

$$K(\vec{m}, \eta^*) = \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \eta_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij} \xi_i'' \eta_j^* = K'(\xi'', \eta^*) \leq K'(\xi^*, \eta^*) = K\left((\xi^*)^m, \eta^*\right).$$

Для случая 1 с вектором $(\xi_1', \ldots, \xi_{m-1}')$ доказательство проводится аналогично с использованием выражений (1.8.7), (1.8.8), (1.8.17).

Так как при $j = 1, \ldots, n$ имеем $K\left((\xi^*)^m, \vec{j}\right) = K'(\xi^*, \vec{j})$ и выполняются (1.8.17) и (1.8.15), то правое неравенство из (1.8.16) выполняется для всех

$j = 1, \ldots, n$. Итак, мы доказали, что ситуация $\left(\left(\xi^*\right)^m, \eta^*\right)$ является равновесной в смешанном расширении игры $\underset{m\times n}{A}$, а следовательно по (1.8.17)

$$V(A) = K\left(\left(\xi^*\right)^m, \eta^*\right) = K'\left(\xi^*, \eta^*\right) = V(A').$$

Доказательство утверждений 4 – 6 для второго игрока проводится аналогично. ⊗

Принимая во внимание теорему 1.8.3, скорректируем **план решения матричной игры** $\underset{m\times n}{A}$:

1) Проверяем, что ситуаций равновесия в чистых стратегиях не существует (если таковые найдутся, то найдены оптимальные чистые стратегии и чистая цена игры).
2) Находим все доминируемые чистые стратегии обоих игроков; вычеркивая строки и столбцы с номерами доминируемых стратегий, получаем новую матрицу $\underset{k\times l}{Q}$.
3) Если $\underset{k\times l}{Q} > 0$, то переходим в пункт 4 (считая $\underset{k\times l}{S} = \underset{k\times l}{Q}$), иначе строим матрицу $\underset{k\times l}{S} = \underset{k\times l}{Q} + \underset{k\times l}{R}$, где каждый элемент матрицы $\underset{k\times l}{R}$ равен числу $r = \left|\min\limits_{i,j} q_{ij}\right| + 1$.
4) Находим оптимальные решения $X_{\min}$, $Y_{\max}$ задач линейного программирования

$$f^* = B^{\mathrm{T}} X \to \min \qquad\qquad f = C^{\mathrm{T}} Y \to \max$$
$$\begin{cases} S^{\mathrm{T}} X \geq C \\ X \geq 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} SY \leq B \\ Y \geq 0 \end{cases},$$

в которых компонентами вектор-столбцов $\underset{k\times 1}{B}$ и $\underset{l\times 1}{C}$ являются только единицы. Вычислим $M = B^{\mathrm{T}} X_{\min} = C^{\mathrm{T}} Y_{\max}$.

5) Находим ситуацию равновесия в смешанных стратегиях $\left(\xi^*, \eta^*\right)$ для матричной игры $\underset{k\times l}{Q}$, где $\xi^* = \dfrac{X_{\min}}{M}$, $\eta^* = \dfrac{Y_{\max}}{M}$.
6) Находим ситуацию равновесия в смешанных стратегиях для исходной матричной игры $\underset{m\times n}{A}$, вставляя нули в ξ^* в места, соответствующие номерам доминируемых стратегий первого игрока, и в η^* в места, соот-

ветствующие номерам доминируемых стратегий второго игрока. Таким образом, полученные расширения ξ^* и η^* на местах, соответствующих номерам доминируемых стратегий, образуют ситуацию равновесия в смешанных стратегиях смешанного расширения игры с матрицей $\underset{m\times n}{A}$.

7) Находим значение игры $V(A)=\dfrac{1}{M}-r$ (или $V(A)=\dfrac{1}{M}$, если $\underset{k\times l}{S}=\underset{k\times l}{Q}$).

Задача 1.8.1. Платежная матрица игры есть $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Найти все доминируемые (заведомо невыгодные) чистые стратегии первого и второго игрока.

Решение: Предварительно проверим, что в платежной матрице не существует седловых точек. (Иначе все стратегии, не входящие в седловые точки, будут являться доминируемыми.) Найдем минимальное число в каждой строке, а затем нижнюю цену игры

$$\underline{v}=\max_i \min_j a_{ij}=\max\{1,\ 0,\ 2,\ 3\}=3.$$

Найдем максимальный элемент в каждом столбце, и верхнюю цену

$$\overline{v}=\min_j \max_i a_{ij}=\min\{5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 8\}=5.$$

Так как $\underline{v}\neq\overline{v}$, то нет ситуаций равновесия в чистых стратегиях.

Напомним, что если все элементы i-й строки меньше или равны соответствующих элементов какой-либо другой строки, то чистая стратегия первого игрока под номером i будет доминируемой. А если все элементы j-го столбца больше или равны соответствующих элементов какого-нибудь другого столбца, то чистая стратегия второго игрока под номером j будет доминируемой.

Будем сравнивать соответствующие элементы первой и второй строк до тех пор пока знак «<» не поменяется на знак «>», (или знак «>» не поменяется на знак «<»):

$$\text{1-я и 2-я строка:}\quad \begin{cases} 3<5, \\ 4<6, \\ 6>5. \end{cases}$$

Так как знаки «разнонаправлены», то пока мы не можем выделить доминируемую стратегию. Сравним попарно остальные строки:

1-я и 3-я строка: $\begin{cases} 3 > 2, \\ 4 > 3, \\ 6 > 3, \\ 1 < 4; \end{cases}$ 1-я и 4-я строка: $\begin{cases} 3 = 3, \\ 4 < 5, \\ 6 > 4; \end{cases}$

2-я и 3-я строка: $\begin{cases} 5 > 2, \\ 6 > 3, \\ 5 > 3, \\ 0 < 4; \end{cases}$ 2-я и 4-я строка: $\begin{cases} 5 > 3, \\ 6 > 5, \\ 5 > 4, \\ 0 < 7. \end{cases}$

По той же самой причине пока мы не видим доминируемые стратегии. Сравнивая 3-ю и 4-ю строки, заметим, что все элементы 3-й строки меньше соответствующих элементов 4-й строки, следовательно, третья стратегия первого игрока является доминируемой. В дальнейшем ее элементы можно не рассматривать, так как по принципу доминирования и выполнения теорем данного параграфа третья стратегия не может быть оптимальной. Вычеркнем элементы третьей (доминируемой) строки, и в полученной матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 0 & 8 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

сравним попарно элементы всех столбцов:

1-й и 2-й столбец: $\begin{cases} 3 < 4, \\ 5 < 6, \\ 3 < 5; \end{cases}$ 1-й и 3-й столбец: $\begin{cases} 3 < 6, \\ 5 \le 5, \\ 3 < 4; \end{cases}$

1-й и 4-й столбец: $\begin{cases} 3 > 1, \\ 5 > 0, \\ 3 < 7; \end{cases}$ 1-й и 5-й столбец: $\begin{cases} 3 < 7, \\ 5 < 8, \\ 3 < 6. \end{cases}$

Так как все элементы 1-го столбца не превосходят соответствующих элементов 2-го, 3-го и 5-го столбца, то вторая, третья и пятая стратегия второго игрока являются доминируемыми. По принципу доминирования эти стратегии не могут являться активными, поэтому можно вычеркнуть 2-й, 3-й, 5-й столбец.

В матрице с вычеркнутыми 3-й строкой и 2-м, 3-м и 5-м столбцами,

$$\begin{pmatrix} 3 & \times & \times & 1 & \times \\ 5 & \times & \times & 0 & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 3 & \times & \times & 7 & \times \end{pmatrix},$$

сохраняя прежнюю нумерацию, снова сравним оставшиеся элементы строк

1-я и 2-я строка: $\begin{cases} 3 < 5, \\ 1 > 0; \end{cases}$ 1-я и 4-я строка: $\begin{cases} 3 \le 3, \\ 1 < 7. \end{cases}$

Так как после вычеркивания элементы 1-й строки не превосходят элементов 4-й, то доминируемой можно считать1-ю стратегию первого игрока. Заметим, что нумерацию строк и столбцов мы оставляем как в исходной матрице, чтобы не было путаницы. В итоге получим матрицу второго порядка $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, для которой $\begin{cases} 5 > 3, \\ 0 < 7, \end{cases}$ и $\begin{cases} 5 > 0, \\ 3 < 7. \end{cases}$

Итак, мы нашли все доминируемые чистые стратегии обоих игроков.

Ответ: Доминируемыми чистыми стратегиями первого игрока являются стратегии под номерами 1 и 3, а доминируемыми чистыми стратегиями второго игрока – стратегии 2, 3, и 5.

Задача 1.8.2. Платежная матрица игры есть $\underset{4\times5}{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

Найти оптимальные стратегии обоих игроков и цену матричной игры.

Решение: Согласно скорректированному плану решения матричной игры, во-первых, проверяем, существуют ли седловые точки. В задаче 1.8.1 доказано, что в данной матрице седловых точек нет.

Во-вторых, находим все доминируемые чистые стратегии обоих игроков. В задаче 1.8.1 мы установили, что доминируемыми стратегиями первого игрока являются стратегии под номерами 1 и 3, а доминируемыми стратегиями второго игрока – стратегии 2, 3, и 5. Вычеркивая строки и столбцы с номерами доминируемых стратегий, получаем новую матрицу

$$\underset{2\times2}{Q} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Так как все элементы матрицы $\underset{2\times 2}{Q}$, кроме одного, нулевого, являются положительными, то пропустив третий пункт плана, перейдем сразу к четвертому. Заметим, что для матриц второго порядка оптимальное решение можно находить по формулам (1.6.1) – (1.6.3). В задаче 1.6.1 мы нашли для данной матрицы $\underset{2\times 2}{Q}$ ситуацию равновесия в смешанных стратегиях $\left(\xi^*,\ \eta^*\right)$, где $\xi^* = \left(\frac{4}{9},\ \frac{5}{9}\right)$ и $\eta^* = \left(\frac{7}{9},\ \frac{2}{9}\right)$, и значение игры $V\left(A\right) = \frac{35}{9}$. Итак, из пятого пункта плана переходим в шестой.

Находим ситуацию равновесия в смешанных стратегиях для исходной матричной игры $\underset{m\times n}{A}$, вставляя нули в ξ^* в места, соответствующие номерам 1 и 3 доминируемых чистых стратегий первого игрока, и в η^* в места, соответствующие номерам 2, 3, 5 доминируемых стратегий второго игрока. Таким образом, получим оптимальную стратегию первого игрока $\left(0,\ \frac{4}{9},\ 0,\ \frac{5}{9}\right)$ и оптимальную стратегию второго игрока $\left(\frac{7}{9},\ 0,\ 0,\ \frac{2}{9},\ 0\right)$.

В соответствии с седьмым пунктом плана значение игры $V\left(A\right) = \frac{35}{9}$.

Ответ: Оптимальная стратегия первого игрока $\left(0,\ \frac{4}{9},\ 0,\ \frac{5}{9}\right)$ и оптимальная стратегия второго игрока $\left(\frac{7}{9},\ 0,\ 0,\ \frac{2}{9},\ 0\right)$, цена игры $V\left(A\right) = \frac{35}{9}$.

1.9. Итеративный метод решения матричных игр

Если в матричной игре не существует седловой точки, матрица большой размерности, а поиск доминируемых стратегий не прост, то найти ситуацию равновесия в смешанных стратегиях сведением к задаче линейного программирования довольно сложно. На практике иногда достаточно найти приближенные оптимальные стратегии игроков. В этом случае применяют итеративные методы решения матричных игр, одним из которых является метод Брауна – Робинсона.

Идея метода состоит в многократном фиктивном разыгрывании игры с заданной платежной матрицей $\underset{m\times n}{A}$, когда в каждом разыгрывании, называемом ***итерацией***, игроки выбирают свои наилучшие чистые стратегии.

При многократной имитации игры набирается статистика, показывающая, какие стратегии первого игрока максимизируют его накопленный выигрыш, какие стратегии второго игрока минимизируют его накопленный проигрыш, и таким образом определяются оптимальные стратегии.

Не нарушая общности, будем считать, что сначала выбирает чистую стратегию первый игрок. Он выбирает ее произвольно. Тогда второй игрок выбирает чистую стратегию, минимизирующую его проигрыш при выбранной стратегии первого игрока. В следующей итерации первый игрок выбирает стратегию, максимизирующую его накопленный выигрыш при выбранной на предыдущем шаге стратегии второго игрока. Второй игрок выбирает чистую стратегию, минимизирующую его накопленный проигрыш при только что выбранной стратегии первого игрока. Предположим, что за k итераций первый игрок выбирал i-ю чистую стратегию α_i^k раз ($i = 1, \ldots, m$), а второй игрок использовал j-ю чистую стратегию β_j^k раз ($j = 1, \ldots, n$). Векторы

$$\left(\alpha_1^k / k, \ldots, \alpha_m^k / k\right) \text{ и } \left(\beta_1^k / k, \ldots, \beta_n^k / k\right), \tag{1.9.1}$$

являющиеся смешанными стратегиями первого и второго игроков соответственно, можно принять за приближенные к оптимальным при достаточно большом k. Обозначим через

$$\underline{v}^k = \frac{1}{k} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \alpha_i^k \tag{1.9.2}$$

и через

$$\overline{v}^k = \frac{1}{k} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \beta_j^k . \tag{1.9.3}$$

Тогда из определения значения игры мы будем иметь неравенства

$$\max_k \underline{v}^k \le V(A) \le \min_k \overline{v}^k .$$

Таким образом, получен итеративный процесс, позволяющий находить приближенное решение матричной игры, при этом степень близости приближения к истинному значению игры определяется длиной отрезка $\left[\max_k \underline{v}^k, \min_k \overline{v}^k\right]$. Сходимость метода гарантируется теоремой Робинсона, которую мы примем без доказательства.

Теорема 1.9.1 (Робинсона)

В принятых выше обозначениях верно, что

$$\lim_{k \to \infty}\left(\max_k \underline{v}^k\right) = \lim_{k \to \infty}\left(\min_k \overline{v}^k\right) = V(A).$$

Обычно в приложениях приближенная цена игры определяется как среднее арифметическое чисел $\underline{v}^k$ и $\overline{v}^k$, т. е. $\hat{V}(A) \approx \left(\underline{v}^k + \overline{v}^k\right)/2$.

Задача 1.9.1. Найти приближенное решение игры с матрицей

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 8 & 5 & 9 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

итеративным методом Брауна – Робинсона, «разыграв» 21 итерацию.

Решение: Заметим, что в задаче 1.4.3 доказано, что у данной матрицы, обозначенной через $\underset{3\times 3}{S}$, нет седловых точек, следовательно, мы можем найти только оптимальные смешанные стратегии игроков. (В противном случае применять метод Брауна – Робинсона бессмысленно.)

Сначала у игроков нет информации о стратегиях, выбранных противником, поэтому для определенности выберем стратегию под номером 1. (Можно выбрать, следуя максиминному принципу, но при достаточно большом количестве итераций тот или иной выбор не повлияет на окончательный результат.) Итак, предположим, что начинает первый игрок, выбирая 1-ю стратегию, которая соответствует в матрице 1-й строке. Тогда второй игрок может проиграть одно из следующих значений $(4,\ 6,\ 4)$. $\min\{4,\ 6,\ 4\} = 4$, и этот минимум достигается при выборе вторым игроком либо 1-й, либо 3-й стратегии. Допустим, второй игрок выбрал 3-ю стратегию, которая соответствует в матрице 3-му столбцу. В ответ на данный выбор во второй итерации первый игрок, учитывая, что $\max\{4,\ 9,\ 1\} = 9$, выбирает 2-ю стратегию. Тогда накопленные проигрыши второго игрока составят $(4+8,\ 6+5,\ 4+9)$. Учитывая, что $\min\{12,\ 11,\ 13\} = 11$, второй игрок выбирает 2-ю стратегию. Следовательно, накопленные выигрыши первого игрока – $(4+6,\ 9+5,\ 1+6)$. В 3-й итерации первый игрок выбирает 2-ю стратегию, т. к. $\max\{10,\ 14,\ 7\} = 14$, достигается именно на ней. Рассуждая далее аналогично, мы получим табл. 1.9.1 итераций метода Брауна – Робинсона. В табл. 1.9.1 полужирным шрифтом выделены проигрыши второго игрока, указывающие на его выбор стратегии в данной итерации, и выигрыши первого игрока, показывающие, какой номер стратегии следует выбрать в следующей итерации.

В двадцати одной итерации первый игрок выбирал первую стратегию 9 раз, вторую – 10 раз, а третью стратегию – 2 раза. Следовательно, приближенная оптимальная стратегия первого игрока, вычисленная по первой

формуле (1.9.1), равна $\hat{\xi}^* \approx \left(\frac{9}{21}, \frac{10}{21}, \frac{2}{21}\right)$. В тех же итерациях второй игрок выбирал первую стратегию 3 раза, вторую – 17 раз и третью стратегию – 1 раз, поэтому приближенная оптимальная стратегия второго игрока, найденная по второй формуле (1.9.1), есть $\hat{\eta}^* \approx \left(\frac{3}{21}, \frac{17}{21}, \frac{1}{21}\right)$.

Таблица 1.9.1

Номер итерации	Чистая стратегия 1-го игрока	Накопленные проигрыши 2-го игрока			Чистая стратегия 2-го игрока	Накопленные выигрыши 1-го игрока		
1	1	4	6	**4**	3	4	**9**	1
2	2	12	**11**	13	2	10	**14**	7
3	2	20	**16**	22	2	16	**19**	13
4	2	28	**21**	31	2	22	**24**	19
5	2	36	**26**	40	2	28	**29**	25
6	2	44	**31**	49	2	**34**	34	31
7	1	48	**37**	53	2	**40**	39	37
8	1	52	**43**	57	2	**46**	44	43
9	1	56	**49**	61	2	**52**	49	49
10	1	60	**55**	65	2	**58**	54	55
11	1	64	**61**	69	2	**64**	59	61
12	1	68	**67**	73	2	**70**	64	67
13	1	**72**	73	77	1	**74**	72	72
14	1	**76**	79	81	1	78	**80**	79
15	2	84	**84**	90	2	84	85	**85**
16	3	**89**	90	91	1	88	**93**	90
17	2	97	**95**	100	2	94	**98**	96
18	2	105	**100**	109	2	100	**103**	102
19	2	113	**105**	118	2	106	**108**	108
20	2	121	**110**	127	2	112	113	**114**
21	3	126	**116**	128	2	118	118	**120**

Заметим, что приближенная оптимальная смешанная стратегия второго игрока, найденная методом Брауна – Робинсона, полностью совпала с «точной» оптимальной смешанной стратегией, найденной методами линейного программирования в задаче 1.4.3. Но, к сожалению, «точная» оп-

тимальная смешанная стратегия первого игрока $\xi^* = \left(\frac{11}{21}, \frac{8}{21}, \frac{2}{21}\right)$ отличается от своего приближенного аналога $\hat{\xi}^* \approx \left(\frac{9}{21}, \frac{10}{21}, \frac{2}{21}\right)$, следовательно, требуются дополнительные итерации для поиска более точного решения. Стоит отметить, что теорема 1.9.1 гарантирует, что при бесконечном увеличении числа итераций k стратегии, найденные по формуле (1.9.1), превратятся в оптимальные смешанные стратегии обоих игроков.

Приближенная нижняя цена после двадцати одной итерации может быть вычислена с помощью формулы (1.9.2), но предварительно вычислим $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_i^k$, где $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1^{21} + a_{21}\xi_2^{21} + a_{31}\xi_3^{21} &= 4\cdot 9 + 8\cdot 10 + 5\cdot 2 = 126 \\ a_{12}\xi_1^{21} + a_{22}\xi_2^{21} + a_{32}\xi_3^{21} &= 6\cdot 9 + 5\cdot 10 + 6\cdot 2 = 116. \\ a_{13}\xi_1^{21} + a_{23}\xi_2^{21} + a_{33}\xi_3^{21} &= 4\cdot 9 + 9\cdot 10 + 1\cdot 2 = 128 \end{aligned}$$

Найдем по формуле (1.9.2) $\underline{v}^{21} = \frac{1}{21}\min\{126;\ 116;\ 128\} = \frac{116}{21}$.

Приближенная верхняя цена после двадцати одной итерации может быть вычислена с помощью формулы (1.9.3), но предварительно вычислим $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^k$, где $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} a_{11}\eta_1^{21} + a_{12}\eta_2^{21} + a_{13}\eta_3^{21} &= 4\cdot 3 + 6\cdot 17 + 4\cdot 1 = 118 \\ a_{21}\eta_1^{21} + a_{22}\eta_2^{21} + a_{23}\eta_3^{21} &= 8\cdot 3 + 5\cdot 17 + 9\cdot 1 = 118. \\ a_{31}\eta_1^{21} + a_{32}\eta_2^{21} + a_{33}\eta_3^{21} &= 5\cdot 3 + 6\cdot 17 + 1\cdot 1 = 118 \end{aligned}$$

Найдем по формуле (1.9.3) $\overline{v}^{21} = \frac{1}{21}\max\{118;\ 118;\ 118\} = \frac{118}{21}$.

Заметим, что $\overline{v}^{21}$ совпадает с «точным» значением игры, найденным в задаче 1.4.3, поэтому будем считать, что $\tilde{V}(A) \approx \overline{v}^{21} = \frac{118}{21}$.

Ответ: Приближенная оптимальная ситуация равновесия в смешанных стратегиях $\left(\left(\frac{9}{21}, \frac{10}{21}, \frac{2}{21}\right); \left(\frac{3}{21}, \frac{17}{21}, \frac{1}{21}\right)\right)$ и приближенное значение игры $\hat{V}(A) \approx \frac{118}{21}$.

Следует отметить, что если игра имеет более одного оптимального решения, то приближенное значение игры будет стремиться к точному, но приближенные оптимальные стратегии иногда будут отличаться от найденных с помощью не приближенных методов.

1.10. Матричные игры с природой

Если в матричной игре первый игрок действует «разумно», т. е. старается максимизировать свой выигрыш; а второй игрок выбирает свои стратегии, не стремясь минимизировать свой проигрыш, а не предсказуемо, то второго игрока называют природой, а сами игры – играми с природой.

Стратегии природы реализуются случайным образом, причем настолько неопределенным, что даже не подчиняются сколько - нибудь известным законам распределения вероятностей случайных величин.

Рассмотрим пример игры с природой.

Пример 1.10.1. Фермер Иванов имеет три участка земли: влажный *A*, средней влажности *B* и сухой *C*. Один из этих участков предполагается использовать для выращивания картофеля, а остальные – для выращивания огурцов. Известно, что для получения хорошего урожая картофеля требуется наличие определенного количества влаги в почве в период вегетации. При излишней влажности посаженный картофель может гнить, а при недостаточном количестве осадков будет плохо развиваться, что приводит к снижению урожайности. Требуется определить, на каком участке сажать картофель, чтобы получить хороший урожай, если известна средняя урожайность картофеля на каждом участке в зависимости от погодных условий. На участке *A* урожайность составляет 200, 100, 250 ц с 1 га при выпадении соответственно нормального количества осадков B_1, больше нормы B_2, меньше нормы B_3. Аналогично на участке *B* урожайность составляет 230, 120 и 200 ц, а на участке *C* – 240, 260 и 100 ц. Определим стратегии фермера Иванова: A_1 – сажать картофель на влажном участке *A*, A_2 – сажать картофель на участке средней влажности *B*, A_3 – сажать картофель на сухом участке *C*. Стратегии природы: B_1 – выпадение нормального количества осадков, B_2 – выпадение осадков больше нормы, B_3 – меньше нормы. Тогда можно задать платежную матрицу игры с природой следующим образом:

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 200 & 100 & 250 \\ 230 & 120 & 200 \\ 240 & 260 & 100 \end{pmatrix}.$$

Анализ матрицы выигрышей игры с природой следует начинать с выявления и удаления доминируемых (заведомо невыгодных) и дублирующих (эквивалентных) стратегий первого игрока (человека). Но, ни одну стратегию второго игрока (природы) отбросить нельзя, так как каждое действие природы происходит случайным образом. Неопределенность в игре с природой настолько велика, что порой первому игроку труднее принять оптимальное решение, чем в матричной игре, в которой неопределенность снимается предположением о «разумности» противника. Поэтому в играх с природой применяют специфические методы нахождения оптимального решения. Прежде чем рассматривать новые методы, следует заметить, что всегда можно придерживаться принципа максимина, который в играх с природой носит название «критерий Вальда».

В соответствии с ***критерием Вальда*** в качестве оптимальной стратегии первому игроку следует выбирать максиминную стратегию i^*, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш. Если a_{ij} – произвольный элемент матрицы игры с природой $\underset{m\times n}{A}$, то оптимальная по критерию Вальда стратегия i^* такова, что на ней достигается значение величины

$$v = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij} = \min_{1\le j\le n} a_{i^* j}.$$

Критерий Вальда является критерием крайнего пессимизма, поэтому можно использовать более оптимистичный критерий Гурвица. Этот критерий рекомендует при выборе решения не руководствоваться ни крайним пессимизмом, ни крайним оптимизмом. Согласно критерию Гурвица максимизируется среднее взвешенное между выигрышами крайнего пессимизма и крайнего оптимизма, причем «вес» – коэффициент пессимизма λ, заключен между 0 и 1.

В качестве оптимальной стратегии i^* по ***критерию Гурвица*** выбираем ту, которая доставляет значение величине

$$h = \max_{1\le i\le m}\left[\lambda \min_{1\le j\le n} a_{ij} + (1-\lambda)\max_{1\le j\le n} a_{ij}\right], \qquad (1.10.1)$$

где параметр λ таков, что $0 \le \lambda \le 1$.

При $\lambda = 1$ критерий Гурвица, очевидно, превращается в пессимистический критерий Вальда, а при $\lambda = 0$ – в критерий крайнего оптимизма. Выбор коэффициента λ определяется более - менее интуитивно исходя из

субъективных соображений об опасности возникновения той или иной ситуации, степени желательной «подстраховки», которая зависит и от характера задачи, и от характера игрока. Параметр λ выбирается на основании субъективных соображений (опыта, здравого смысла и т.д.).

В некоторых задачах целесообразнее анализировать не выигрыши, а риски первого игрока.

Предварительно определим ***риск первого игрока*** r_{ij}, как недополученный выигрыш в ситуации $(i,\ j)$, а именно

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

где $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, и элементы

$$\beta_j = \max_{1 \le i \le m} a_{ij},\ j = 1, \ldots, n.$$

Согласно ***критерию Сэвиджа*** в качестве оптимальной следует выбирать ту стратегию i^*, при которой в наихудших условиях риск наименьший, т.е. на стратегии i^* достигается значение величины

$$s = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij} = \max_{1 \le j \le n} r_{i^* j}\ . \qquad (1.10.2)$$

Задача 1.10.1. Фермер Петров задумал выращивать капусту. На урожайность капусты в основном оказывают влияние погодные условия и количество внесенных удобрений. Лето может быть нормальное B_1, с количеством осадков ниже среднего уровня B_2 и с количеством осадков выше среднего B_3. Петров удобряет свое поле либо по норме A_1, либо ниже нормы A_2, либо сверх нормы A_3. Прибыль, которую можно получить в зависимости от погодных условий и внесенных удобрений, задана табл. 1.10.1.

Таблица 1.10.1

Состояния природы		B_1	B_2	B_3
Стратегии фермера Петрова	A_1	60	30	45
	A_2	50	20	55
	A_3	65	25	40

Найти номер оптимальной стратегии фермера Петрова, определенный по критерию а) Вальда, б) Гурвица с параметром $\lambda = 0{,}7$ (небольшая склонность к пессимизму), в) Гурвица с параметром $\lambda = 0{,}1$ (склонность к оптимизму), г) Сэвиджа.

Решение: а) Критерий Вальда предписывает придерживаться максиминной стратегии. Найдем в каждой строке минимальное число $\alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$ и достроим справа от матрицы игры с природой столбец.

Среди всех элементов полученного столбца в табл. 1.10.2 выделим полужирным шрифтом максимальный: $\max\{30,\ 20,\ 25\} = 30.$ Максимин $v = 30$ находится в первой строке, следовательно, в качестве оптимальной стратегии нужно выбрать первую A_1.

Таблица 1.10.2

	B_1	B_2	B_3.	$\alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$
A_1	60	30	45	**30**
A_2	50	20	55	20
A_3	65	25	40	25

б) Если мы хотим воспользоваться критерием Гурвица, то предварительно найдем в каждой строке матрицы игры с природой минимальный элемент $\alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$ и максимальный элемент $\mu_i = \max\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$. Допишем эти числа в два столбца справа от платежной матрицы. Затем в третьем дополнительном столбце вычислим значения $\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\mu_i$, при $\lambda = 0{,}7$. Согласно формуле (1.10.1) среди всех элементов последнего столбца в табл. 1.10.3 выделим полужирным шрифтом максимальное число: $\max\{39;\ 20{,}5;\ 37\} = 39.$ Значение $h = 39$ находится в первой строке, следовательно, в качестве оптимальной стратегии нужно выбрать первую A_1.

Таблица 1.10.3

	B_1	B_2	B_3.	$\alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$	$\mu_i = \max\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$	$\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\mu_i$
A_1	60	30	45	30	60	**39**
A_2	50	20	55	20	55	20,5
A_3	65	25	40	25	65	37

в) Если изменить в критерии Гурвица параметр с $\lambda = 0{,}7$ на $\lambda = 0{,}1$, то мы получим табл. 1.10.4, аналогичную предыдущей табл. 1.10.3. Значение

$h = 61$, найденное по формуле (1.10.1), находится в третьей строке, следовательно, в качестве оптимальной следует выбрать третью стратегию A_3.

Таблица 1.10.4

	B_1	B_2	B_3.	$\alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$	$\mu_i = \max\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$	$\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\mu_i$
A_1	60	30	45	30	60	57
A_2	50	20	55	20	55	51,5
A_3	65	25	40	25	65	**61**

г) Критерий Сэвиджа при выборе стратегии советует опираться не на «выигрыш», а на риск. Для матрицы рисков предварительно найдем β_j – максимальное число в j-м столбце, которое допишем в табл. 1.10.5 под матрицей игры с природой.

Таблица 1.10.5

	B_1	B_2	B_3.
A_1	60	30	45
A_2	50	20	55
A_3	65	25	40
$\beta_j = \max\limits_{1 \le i \le 3} a_{ij}$	65	30	55

Составим матрицу рисков фермера Петрова по формулам $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$. К матрице рисков из табл. 1.10.6 добавим столбец, в который запишем максимальный риск, соответствующий выбранной стратегии A_i (при самом неблагоприятном для этой стратегии состоянии природы B_j) $r_i = \max\limits_{1 \le j \le 3} r_{ij}$.

Таблица 1.10.6

	B_1	B_2	B_3.
A_1	5	0	10
A_2	15	10	0
A_3	0	5	15

Получим табл. 1.10.7. В качестве оптимальной выбирается та стратегия, при которой величина риска минимальна, поэтому в дополнительном столбце табл. 1.10.7 выделим полужирным шрифтом минимальное число $s = \min\{10;\ 15;\ 15\} = 10$, найденное по формуле (1.10.2). Число $s = 10$ находится в первой строке, следовательно, по критерию Сэвиджа, в качестве оптимальной выбираем первую стратегию A_1.

Таблица 1.10.7

	B_1	B_2	B_3.	$r_i = \max\limits_{1 \le j \le n} r_{ij}$
A_1	5	0	10	**10**
A_2	15	10	0	15
A_3	0	5	15	15

Ответ: а) оптимальной стратегией фермера Петрова по критерию Вальда является первая;

б) оптимальной стратегией фермера Петрова по критерию Гурвица с параметром $\lambda = 0{,}7$ является первая;

в) оптимальной стратегией фермера Петрова по критерию Гурвица с параметром $\lambda = 0{,}1$ является третья (Петров проявляет в данном случае большой оптимизм в отличие от всех остальных вариантов);

г) оптимальной стратегией фермера Петрова по критерию Сэвиджа является первая.

Замечание. Помимо критериев Вальда, Сэвиджа и Гурвица, если известна дополнительная информация о стратегиях природы, например, вероятности их появления, используют критерии Байеса или Лапласа.

Описание критериев Байеса и Лапласа можно посмотреть в [5, с. 302].

Глава 2
НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Наравне с антагонистическими конфликтами довольно часто встречаются конфликты более общего характера, участники которых преследуют хотя и различные, но не обязательно прямо противоположные интересы. Такие конфликты рассматриваются в теории неантагонистических игр *n* лиц, основы которой излагаются в данной главе.

2.1. Бескоалиционные игры с ненулевой суммой

Игры, в которых общая сумма выигрышей всех игроков не обязательно нулевая, а правилами игры не предусмотрены совместные действия некоторых групп игроков (коалиций), изучаются в теории бескоалиционных игр.

Бескоалиционной игрой n лиц называется совокупность трех объектов $\left\langle I,\ (X_i)_{i\in I},\ (H_i)_{i\in I}\right\rangle$ такая, что

1) $I=\{1,\ \ldots,\ n\}$ – множество пронумерованных игроков;

2) $(X_i)_{i\in I}=\{X_1,\ \ldots,\ X_n\}$, где X_i – множество чистых стратегий i -го игрока, $i\in I$;

3) $(H_i)_{i\in I}=\{H_1,\ \ldots,\ H_n\}$, где $H_i\colon X\to R$ – действительная функция выигрыша *i*-го игрока, $i\in I$, определенная на множестве ситуаций $(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in X$, $X=\prod\limits_{i\in I}X_i=X_1\times\ \ldots\ \times X_n$.

Разыгрывание бескоалиционной игры *n* лиц происходит следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают каждый свою стратегию $x_i\in X_i$, $i\in I$, в результате чего образуется ситуация $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$. Тогда каждый игрок получает выигрыш $H_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $i\in I$.

Бескоалиционная игра n лиц называется ***конечной***, если все множества стратегий X_i каждого из игроков конечны.

Обозначим через $(x^*\,||x_i)=(x_1^*,\ \ldots,\ x_{i-1}^*,\ x_i,\ x_{i+1}^*,\ \ldots,\ x_n^*)$ ситуацию, в которой *i*-й игрок меняет свою стратегию с x_i^* на x_i, а все остальные игроки остаются при своих прежних стратегиях.

Ситуацией равновесия по Нэшу бескоалиционной игры n лиц $\left\langle I,\ \left(X_i\right)_{i\in I},\ \left(H_i\right)_{i\in I}\right\rangle$ называется ситуация $x^* = \left(x_1^*, ..., x_n^*\right) \in X_1 \times \ldots \times X_n$, для которой выполнены неравенства

$$H_i\left(x^* \,||\, x_i\right) \le H_i\left(x^*\right) \quad \forall i \in I,\ \forall x_i \in X_i.$$

Стратегия *i*-го игрока, входящая хотя бы в одну ситуацию равновесия по Нэшу, называется ***равновесной***.

В антагонистическом случае мы убедились, что ситуация равновесия в чистых стратегиях существует очень редко. Поэтому вводят понятие равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Введем предварительно понятие смешанного расширения конечной бескоалиционной игры *n* лиц. Как и прежде, смешанную стратегию *i*-го игрока μ_i отождествим с вероятностным распределением на множестве его чистых стратегий X_i. Обозначим через $\mu_i\left(x_i\right)$ вероятность, которую смешанная стратегия μ_i приписывает чистой стратегии $x_i \in X_i$. Множество всех смешанных стратегий *i*-го игрока обозначим через Ξ_i. Вероятность осуществления ситуации $x = \left(x_1, ..., x_n\right)$ равна произведению вероятностей выборов составляющих ее стратегий, т. е.

$$\mu\left(x\right) = \mu_1\left(x_1\right) \cdot \mu_2\left(x_2\right) \cdot \ldots \cdot \mu_n\left(x_n\right). \tag{2.1.1}$$

Формула (2.1.1) определяет вероятностное распределение на множестве всех ситуаций $X = \prod_{i\in I} X_i$. Набор $\mu = \left(\mu_1,\ \ldots,\ \mu_n\right)$ называется ***ситуацией в смешанных стратегиях***. Ситуация в смешанных стратегиях μ реализует различные ситуации в чистых стратегиях с некоторыми вероятностями, поэтому значение функции выигрыша каждого из игроков является случайной величиной. В качестве значения функции выигрыша *i*-го игрока в ситуации μ примем математическое ожидание этой случайной величины:

$$K_i\left(\mu\right) = \sum_{x\in X} H_i\left(x\right)\mu\left(x\right) = \sum_{x_1\in X_1} \ldots \sum_{x_n\in X_n} H_i\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right) \cdot \mu_1\left(x_1\right) \cdot \ldots \cdot \mu_n\left(x_n\right), \tag{2.1.2}$$

где $i \in I$, $x = \left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right) \in X$.

Смешанным расширением бескоалиционной игры $\left\langle I,\ \left(X_i\right)_{i\in I},\ \left(H_i\right)_{i\in I}\right\rangle$ называется игра $\left\langle I,\ \left(\Xi_i\right)_{i\in I},\ \left(K_i\right)_{i\in I}\right\rangle$, где I – множество всех игроков, Ξ_i – множество всех смешанных стратегий *i*-го игрока, $i \in I$, $K_i\left(\mu\right)$ – функция выигрыша *i*-го игрока, $i \in I$, определяемая по формуле (2.1.2).

Если $x'_j \in X_j$ – произвольная чистая стратегия j-го игрока, то обозначим

$$K_i\left(\mu \,||\, x'_j\right) = \sum_{x_1 \in X_1} \dots \sum_{x_{j-1} \in X_{j-1}} \sum_{x_{j+1} \in X_{j+1}} \dots \sum_{x_n \in X_n} H_i\left(x \,||\, x'_j\right) \prod_{k \neq j} \mu_k\left(x_k\right).$$

Если $\mu_j{}' \in \Xi_j$ – произвольная смешанная стратегия j-го игрока в игре $\left\langle I,\ \left(\Xi_i\right)_{i \in I},\ \left(K_i\right)_{i \in I} \right\rangle$, то обозначим

$$K_i\left(\mu \,||\, \mu_j{}'\right) = \sum_{x'_j \in X_j} K_i\left(\mu \,||\, x'_j\right) \mu_j{}'\left(x'_j\right).$$

Ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в игре $\left\langle I,\ \left(\Xi_i\right)_{i \in I},\ \left(K_i\right)_{i \in I} \right\rangle$ называется ситуация $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)$ такая, что

$$K_i\left(\mu^* \,||\, \mu_i\right) \le K_i\left(\mu^*\right), \quad \forall i \in I,\ \forall \mu_i \in \Xi_i.$$

Теорема 2.1.1 (Нэша)

Любая конечная бескоалиционная игра n лиц имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Примем эту теорему без доказательства в силу его громоздкости.

Принцип равновесия по Нэшу состоит в том, что ни одному из игроков поодиночке не выгодно менять свою равновесную стратегию на любую другую при условии, что остальные игроки придерживаются равновесных стратегий.

Но данный принцип не препятствует тому, что если группа игроков (коалиция), сговорившись заранее, отклонится от своих равновесных стратегий, то некоторые ее члены могут получить больший выигрыш, нежели выбирая свои равновесные стратегии.

Можно усилить понятие равновесия по Нэшу, введя так называемую сильно равновесную ситуацию.

Ситуация $x^* = \left(x_1^*, \dots, x_n^*\right)$ называется ***сильно равновесной***, если для любых коалиций игроков $S \subset I$ и $\forall x_S \in \prod_{i \in S} X_i$ выполнено неравенство

$$\sum_{i \in S} H_i\left(x^*\right) \ge \sum_{i \in S} H_i\left(x^* \,||\, x_S\right), \tag{2.1.3}$$

т. е. если даже игроки будут сговариваться, то в каждой коалиции найдется игрок, который не получит больше, чем при осуществлении сильно равновесной ситуации. Здесь $\prod_{i \in S} X_i$ означает декартово произведение множеств

чистых стратегий игроков, принадлежащих коалиции S, а $\left(x^* \,||\, x_S\right)$ – ситуацию, полученную из равновесной $\left(x_1^*,...,x_n^*\right)$, заменой равновесных стратегий всех игроков коалиции S на другие.

Условие (2.1.3) гарантирует нецелесообразность соглашения между игроками с целью вступления их в некоторую коалицию $S \subset I$, так как в каждой такой коалиции найдется игрок, которого данное соглашение не устроит.

Любая сильно равновесная ситуация является очевидно и равновесной по Нэшу. Если бы сильное равновесие существовало в достаточно широком классе игр, то оно могло бы быть приемлемым принципом оптимальности в бескоалиционной игре, но, к сожалению, оно существует крайне редко.

Учитывая вышеизложенное можно вводить другие принципы оптимальности, нежели равновесие по Нэшу.

Ситуацией, оптимальной по Парето, называется такая ситуация $\left(x_1^p,\ \ldots,\ x_n^p\right)$ в бескоалиционной игре *n* лиц $\left\langle I,\ \left(X_i\right)_{i\in I},\ \left(H_i\right)_{i\in I}\right\rangle$, что

1) не существует никакой другой ситуации $\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ такой, что $H_i\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right) \geq H_i\left(x_1^p,\ \ldots,\ x_n^p\right),\quad \forall i \in I$ и

2) $H_{i_0}\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right) > H_{i_0}\left(x_1^p,\ \ldots,\ x_n^p\right)$ хотя бы для одного $i_0 \in I$.

Замечание. Ситуация равновесия по Нэшу гарантирует, что ни один из игроков, действуя в одиночку не может увеличить свой выигрыш, отклонившись от ситуации равновесия, а в оптимальной по Парето ситуации – все игроки, действуя совместно, не могут увеличить выигрыш каждого игрока.

2.2. Биматричные игры

Конечная бескоалиционная игра двух лиц называется ***биматричной игрой*** потому, что она может быть задана двумя платежными матрицами: $\underset{m\times n}{A_1}$, соответствующей функции выигрыша первого игрока $H_1\left(x_i,\ y_j\right)$, и $\underset{m\times n}{A_2}$, соответствующей функции выигрыша второго игрока $H_2\left(x_i,\ y_j\right)$, где стратегии первого игрока $x_i \in X$, а стратегии второго игрока – $y_j \in Y$ про-

нумерованы. Как правило, вместо двух матриц $\underset{m\times n}{A_1}$ и $\underset{m\times n}{A_2}$ записывают одну общую матрицу, каждый элемент которой представляет собой упорядоченную пару выигрышей первого и второго игрока соответственно.

Пример 2.2.1. Данный пример известен в литературе под названием «дилемма заключенного».

Арестованы двое подозреваемых в совершении тяжкого преступления. Они не имеют возможности общаться друг с другом. Так как прямых улик против заключенных нет, то обвинение в значительной мере зависит от того, сознаются ли подозреваемые. Если оба признаются в совершении тяжкого преступления, то они будут осуждены на длительный срок в 8 лет, однако признание будет учтено как смягчающее обстоятельство. Если оба будут молчать, то они будут наказаны за совершение некоторого незначительного преступления и получат по году заключения. Если сознается лишь один, то за содействие следствию, по законам данной страны, сознавшийся будет немедленно выпущен на свободу, а его упорствующий напарник будет приговорен к максимальному сроку за тяжкое преступление – 10 лет тюремного заключения. У обоих заключенных есть по две стратегии: сознаться или молчать. Матрицы выигрышей игроков (подозреваемых) имеют вид

$$\underset{2\times 2}{A_1}=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ -10 & -1\end{pmatrix},\qquad \underset{2\times 2}{A_2}=\begin{pmatrix}-8 & -10\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

В биматричной игре ***ситуация*** $\left(i^*,\ j^*\right)$ является ***равновесной по Нэшу***, если одновременно выполняются неравенства

$$\begin{cases} a^1_{i^*j^*}\ge a^1_{ij^*}, & i=1,\dots,\ m,\\ a^2_{i^*j^*}\ge a^2_{i^*j}, & j=1,\dots,\ n,\end{cases}$$

где a^1_{ij} и a^2_{ij} – элементы платежных матриц $\underset{m\times n}{A_1}$ и $\underset{m\times n}{A_2}$.

Задача 2.2.1. Найти ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре с матрицей выигрышей первого и второго игрока

$$\begin{pmatrix}(23,\ 21) & (10,\ 7) & (0,\ 0) & (1,\ 20) & (2,\ 4)\\ (1,\ 3) & (15,\ 3) & (1,\ 3) & (21,\ 18) & (27,\ 21)\\ (8,\ 11) & (16,\ 25) & (9,\ 4) & (13,\ 12) & (3,\ 7)\\ (13,\ 23) & (6,\ 3) & (3,\ 1) & (1,\ 3) & (7,\ 1)\end{pmatrix}.$$

Решение: По определению ситуации равновесия по Нэшу сначала найдем максимальные первые компоненты в каждом столбце матрицы вы-

игрышей и выделим их полужирным шрифтом. Это максимально возможные выигрыши первого игрока в ситуации, когда второй игрок выбирает свою j-ю стратегию, $j = 1, \ldots, 5$,

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{23},\ 21) & (10,\ 7) & (0,\ 0) & (1,\ 20) & (2,\ 4) \\ (1,\ 3) & (15,\ 3) & (1,\ 3) & (\mathbf{21},\ 18) & (\mathbf{27},\ 21) \\ (8,\ 11) & (\mathbf{16},\ 25) & (\mathbf{9},\ 4) & (13,\ 12) & (3,\ 7) \\ (13,\ 23) & (6,\ 3) & (3,\ 1) & (1,\ 3) & (7,\ 1) \end{pmatrix}.$$

Затем выделим полужирным шрифтом максимальные вторые компоненты в каждой строке матрицы выигрышей обоих игроков – это максимально возможные выигрыши второго игрока в ситуации, когда первый игрок выбирает свою i-ю стратегию, $i = 1, \ldots, 4$,

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{23},\ \mathbf{21}) & (10,\ 7) & (0,\ 0) & (1,\ 20) & (2,\ 4) \\ (1,\ 3) & (15,\ 3) & (1,\ 3) & (\mathbf{21},\ 18) & (\mathbf{27},\ \mathbf{21}) \\ (8,\ 11) & (\mathbf{16},\ \mathbf{25}) & (\mathbf{9},\ 4) & (13,\ 12) & (3,\ 7) \\ (13,\ \mathbf{23}) & (6,\ 3) & (3,\ 1) & (1,\ 3) & (7,\ 1) \end{pmatrix}.$$

Ситуации, в которых обе компоненты одновременно выделены полужирным шрифтом, являются ситуациями равновесия по Нэшу, а именно: $(1;\ 1)$, $(2;\ 5)$ и $(3;\ 2)$. Причем, если в первых двух ситуациях второй игрок получит один и тот же выигрыш в 21 единицу, то в последней ситуации он получит больший на 4 единицы выигрыш. Но первому игроку не совсем выгодно придерживаться ситуации $(3;\ 2)$, т. к. он получит всего лишь 16 единиц, тогда как в ситуации $(2;\ 5)$ первый игрок выиграет 27 единиц. Таким образом, различные ситуации равновесия оказываются в разной степени предпочтительными для различных игроков, и остается нерешенным вопрос: какую из ситуаций равновесия можно принять за оптимальную для каждого?

Ответ: Ситуациями равновесия по Нэшу являются ситуации $(1;\ 1)$, $(2;\ 5)$ и $(3;\ 2)$.

Замечание. Если матрица выигрышей второго игрока $\underset{m\times n}{A_2} = -\underset{m\times n}{A_1}$, то биматричная игра превращается в конечную антагонистическую игру двух лиц, т. е. в матричную игру с платежной матрицей $\underset{m\times n}{A_1}$. Ситуация равновесия по Нэшу становится седловой точкой. Но в отличие от матричной игры

свойства взаимозаменяемости оптимальных чистых стратегий и стабильности цены игры не сохраняются в биматричной игре.

Пример 2.2.2. В задаче 2.2.1 равновесные стратегии первого игрока 1, 2 и 3 не являются равнозначными, для него предпочтительнее вторая стратегия. Аналогично для второго игрока лучшей среди равновесных стратегий 1, 2 и 5 является вторая. Правда, если оба игрока выберут стратегии под номером 2, то они окажутся совсем не в равновесной ситуации $(2;\ 2)$, в которой первый игрок выиграет всего лишь 15 единиц вместо максимальных 27, а второй игрок – 3 единицы вместо 25. Поэтому если первый игрок заранее заявит о своем выборе равновесной стратегии под номером два, то второму игроку ничего не остается, как придерживаться своей пятой равновесной стратегии. Аналогично, если второй игрок заранее объявит о своем выборе равновесной стратегии под номером два, то первому остается только выбрать равновесную стратегию под третьим номером. Так как ситуация равновесия по Нэшу является неустойчивой, то игрокам выгоднее еще до начала игры договариваться о совместном плане действий.

Замечание. Следует отметить, что равновесие по Нэшу не является устойчивым против отклонения от ситуации равновесия коалиции игроков. Если двое или большее число игроков одновременно поменяют свои равновесные стратегии на другие, то некоторые из них могут получить больший выигрыш, нежели находясь в ситуации равновесия по Нэшу.

Пример 2.2.3. Имея матрицы выигрышей заключенных из примера 2.2.1

$$\underset{2\times 2}{A_1} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \underset{2\times 2}{A_2} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

найдем ситуации равновесия по Нэшу. Запишем общую матрицу выигрышей обоих игроков

$$\begin{pmatrix} (-8,-8) & (0,-10) \\ (-10,0) & (-1,-1) \end{pmatrix}.$$

Найдем максимальные первые компоненты в каждом столбце, а затем максимальные вторые компоненты в каждой строке, выделяя их полужирным шрифтом,

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{-8},\mathbf{-8}) & (\mathbf{0},-10) \\ (-10,\mathbf{0}) & (-1,-1) \end{pmatrix}.$$

Выделенные полужирным шрифтом компоненты, находящиеся в одном и том же месте, а именно в первой строке и первом же столбце, определяют ситуацию равновесия по Нэшу $(1;\ 1)$. Но если оба игрока одновременно отклонятся от своих равновесных стратегий, то они окажутся в ситуации $(2;\ 2)$, тогда оба заключенных вместо восьми лет проведут в тюрьме всего лишь по году.

Задача 2.2.2. Найти ситуации, оптимальные по Парето, в биматричной игре с матрицей выигрышей первого и второго игрока

$$\begin{pmatrix} (23,\ 21) & (10,\ 7) & (0,\ 0) & (1,\ 20) & (2,\ 4) \\ (1,\ 3) & (15,\ 3) & (1,\ 3) & (21,\ 18) & (27,\ 21) \\ (8,\ 11) & (16,\ 25) & (9,\ 4) & (13,\ 12) & (3,\ 7) \\ (13,\ 23) & (6,\ 3) & (3,\ 1) & (1,\ 3) & (7,\ 1) \end{pmatrix}.$$

Решение: Сначала найдем максимальную первую компоненту в общей матрице выигрышей обоих игроков и выделим ее полужирным шрифтом

$$\begin{pmatrix} (23,\ 21) & (10,\ 7) & (0,\ 0) & (1,\ 20) & (2,\ 4) \\ (1,\ 3) & (15,\ 3) & (1,\ 3) & (21,\ 18) & (\mathbf{27},\ 21) \\ (8,\ 11) & (16,\ 25) & (9,\ 4) & (13,\ 12) & (3,\ 7) \\ (13,\ 23) & (6,\ 3) & (3,\ 1) & (1,\ 3) & (7,\ 1) \end{pmatrix}.$$

Максимальная первая компонента – это максимальный выигрыш первого игрока, число 27, которое стоит во второй строке и пятом столбце, что соответствует ситуации $(2;5)$. Данная ситуация возможно будет оптимальной по Парето, поэтому удалим (вычеркнем) все ситуации, в которых вторая компонента не превосходит числа 21 – выигрыша второго игрока в ситуации $(2;5)$. Выигрыши обоих игроков в вычеркнутых ситуациях очевидно будут заведомо хуже, чем в ситуации $(2;5)$. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & (\mathbf{27},\ 21) \\ \times & (16,\ 25) & \times & \times & \times \\ (13,\ 23) & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Удалив на время из рассмотрения ситуацию $(2;5)$, возможно оптимальную по Парето, мы снова выделим полужирным шрифтом первую компоненту, максимальную из оставшихся, – это число 16

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & (\mathbf{16},\ 25) & \times & \times & \times \\ (13,\ 23) & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix},$$

тем самым мы определили следующую ситуацию $(3;2)$, возможно оптимальную по Парето. Удалим все ситуации, в которых вторая компонента не превосходит числа 25 – выигрыша второго игрока в ситуации $(3;2)$. Выигрыши обоих игроков в вычеркнутых ситуациях будут заведомо хуже, чем в ситуации $(3;2)$. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & (\mathbf{16},\ 25) & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Так как после временного удаления из рассмотрения ситуации $(3;2)$, возможно оптимальной по Парето, в матрице, полученной на последнем шаге, все ситуации окажутся вычеркнутыми, то переходим к следующему этапу. Сравним между собой все ситуации, возможно оптимальные по Парето. Таких ситуаций у нас две: $(2;5)$ и $(3;2)$. К сожалению, ни одна из них не предпочтительнее другой в силу того, что выигрыш первого игрока в ситуации $(2;5)$, равный 27, больше его выигрыша в 16 единиц в ситуации $(3;2)$; но в то же самое время, выигрыш второго игрока в 21 единицу в ситуации $(2;5)$ меньше его выигрыша в 25 единиц в ситуации $(3;2)$. Таким образом, имеются две ситуации, оптимальные по Парето.

Ответ: $(2;5)$ и $(3;2)$ являются ситуациями, оптимальными по Парето.

2.3. Основные понятия кооперативных игр

Игры, в которых допускаются заключения соглашений о стратегиях до начала игры, а выигрыши могут перераспределяться между игроками, изучает теория кооперативных игр.

Кооперативной игрой n лиц называется пара $\langle I,\ v\rangle$ такая, что

1) $I=\{1,\ \ldots,\ n\}$ – множество пронумерованных игроков, любое непустое подмножество которого называется ***коалицией***;

2) v – вещественная функция, заданная на коалициях $S\subset I$, удовлетворяющая свойствам

$$v(S)+v(T)\le v(S\cup T) \text{ для любых непересекающихся } S\subset I,\ T\subset I, \qquad (2.3.1)$$

$$v(\varnothing)=0; \qquad (2.3.2)$$

v называется ***характеристической функцией***.

Свойство (2.3.2) гарантирует, что выигрыши распределяются между игроками, а не лежат в кубышке. Свойство (2.3.1) означает, что объединение игроков в коалиции является целесообразным с точки зрения увеличения выигрыша.

Из свойства (2.3.1) методом математической индукции можно доказать выполнение для любых непересекающихся коалиций $S_1,\ \ldots,\ S_k$ свойства

$$\sum_{i=1}^{k} v(S_i)\le v\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right). \qquad (2.3.3)$$

Частным случаем неравенства (2.3.3) является

$$\sum_{i=1}^{k} v(S_i)\le v(I). \qquad (2.3.4)$$

Из (2.3.4) следует, что не существует такого разбиения множества игроков I на коалиции, при котором суммарный гарантированный выигрыш этих коалиций превышал бы максимальный выигрыш всех игроков $v(I)$.

Если рассматривать в качестве коалиций множества, состоящие из одного игрока $S_i=\{i\}$, то из свойства (2.3.4) получим

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})\le v(I). \qquad (2.3.5)$$

Игра $\langle I,\ v\rangle$ называется ***существенной***, если

$$\sum_{i\in I} v(\{i\})< v(I). \qquad (2.3.6)$$

В противном случае ***игра*** $\langle I,\ v\rangle$ называется ***несущественной***, потому что максимально возможный выигрыш $v(I)$ можно разделить между игроками единственным образом, даже не разыгрывая игру.

Пример 2.3.1. В литературе данная игра носит название «джаз-оркестр». Директор клуба обещает выплатить 100 рублей певцу, пианисту

и ударнику за совместное выступление. Дуэт певца и пианиста он оценивает в 80 рублей, ударника и пианиста – в 65 рублей и одного пианиста – в 30 рублей. Певец вместе с ударником зарабатывают на двоих 50 рублей, а певец соло – 20 рублей. Ударник в одиночку ничего не может заработать.

Обозначив номерами 1, 2, 3 певца, пианиста и ударника соответственно, мы получим кооперативную игру с множеством игроков $I=\{1,\ 2,\ 3\}$ и характеристической функцией v, определенной следующим образом: $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=20$, $v(\{2\})=30$, $v(\{3\})=0$, $v(\{1,\ 2\})=80$, $v(\{1,\ 3\})=50$, $v(\{2,\ 3\})=65$, $v(\{1,\ 2,\ 3\})=100$. Данная игра является существенной, т. к. $\sum_{i\in I} v(i)=v(1)+v(2)+v(3)=20+30+0=50$, а $v(I)=100$, т. е. выполнено неравенство (2.3.6).

Основная задача теории кооперативных игр заключается в построении реализуемых принципов оптимального распределения максимального выигрыша $v(I)$ между игроками.

Обозначим через α_i сумму, которую получит игрок $i\in I$ при распределении максимального выигрыша $v(I)$ между игроками.

Дележом в игре $\langle I,\ v\rangle$ называется вектор $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$, удовлетворяющий условиям

$$\alpha_i \ge v(\{i\}),\ \forall i\in I; \tag{2.3.7}$$

$$\sum_{i\in I}\alpha_i = v(I). \tag{2.3.8}$$

Условие (2.3.7) называется ***условием индивидуальной рациональности*** и характеризует предположение, что, участвуя в коалиции, каждый игрок будет иметь по меньшей мере столько, сколько он мог бы получить, действуя самостоятельно и не заботясь о поддержке каких-либо других игроков.

Условие (2.3.8) называется ***условием коллективной рациональности***. Оно вполне обосновано, т. к. в случае $\sum_{i\in I}\alpha_i < v(I)$ найдется другое распределение $\hat{\alpha}$, при котором каждый игрок $i\in I$ получит больше, чем его доля α_i. Если же $\sum_{i\in I}\alpha_i > v(I)$, то игроки из I делят между собой нереализуемый выигрыш, поэтому вектор α не осуществим. Следовательно, вектор α может считаться допустимым только при выполнении условия (2.3.8).

Теорема 2.3.1 (критерий дележа)

Для того чтобы вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *был дележом в кооперативной игре* $\langle I, v \rangle$, *необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\alpha_i = v(\{i\}) + \gamma_i, \ \forall i \in I,$$

причем $\gamma_i \geq 0, \ \forall i \in I$ *и* $\sum_{i \in I} \gamma_i = v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})$.

Доказательство теоремы опирается на соблюдение условий (2.3.7) и (2.3.8).

Таким образом, исходом кооперативной игры $\langle I, v \rangle$ является дележ, который возникает в результате соглашений игроков. Вследствие этого, в игре $\langle I, v \rangle$ сравниваются по предпочтительности не ситуации, а дележи и это сравнение, имея сложный характер, приводит к различным представлениям об оптимальности. В результате принципы оптимальности для кооперативных игр оказываются весьма разнообразными.

2.4. Доминирование дележей

Любая несущественная игра имеет единственный дележ, тогда как во всякой существенной игре с более чем одним игроком множество дележей бесконечно. Поэтому при анализе кооперативной игры важную роль играет отношение доминирования.

Дележ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ***доминирует дележ*** $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ***по коалиции*** $S \subset I$ (обозначение $\alpha \underset{S}{\succ} \beta$), если

$$\alpha_i > \beta_i, \quad \forall i \in S; \tag{2.4.1}$$

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \leq v(S). \tag{2.4.2}$$

Условие (2.4.1) означает, что дележ α лучше дележа β для каждого члена коалиции S, а условие (2.4.2) отражает реализуемость дележа α коалицией S, т. е. коалиция S на самом деле может предложить каждому игроку $i \in S$ выигрыш α_i.

Дележ α ***доминирует дележ*** β, если существует коалиция S, для которой $\alpha \underset{S}{\succ} \beta$ (обозначение $\alpha \succ \beta$).

Замечание. Доминирование невозможно по одноэлементной коалиции $\{i\}$, где $i \in I$, и множеству всех игроков I. Действительно, из $\alpha \underset{\{i\}}{\succ} \beta$ сле-

довало бы $\beta_i < \alpha_i \le v(\{i\})$, что противоречит условию (2.3.7). А из $\alpha \underset{I}{\succ} \beta$ следовало бы, что $\alpha_i > \beta_i$, $\forall i \in I$ и поэтому $\sum_{i \in I} \alpha_i > \sum_{i \in I} \beta_i = v(I)$, что противоречит условию (2.3.8).

2.5. Эквивалентность и нормализация игр

Объединение кооперативных игр в те или иные классы существенно упрощает их последующее исследование. В качестве таких классов можно рассмотреть классы эквивалентных игр.

Кооперативная игра $\langle I,\ v_1 \rangle$ ***эквивалентна игре*** $\langle I,\ v_2 \rangle$, если существуют положительное число k и n чисел c_i $(i \in I)$ произвольного знака такие, что для любой коалиции $S \subset I$ выполняется равенство

$$v_2(S) = k\, v_1(S) + \sum_{i \in S} c_i\,. \tag{2.5.1}$$

Эквивалентность игр $\langle I,\ v_1 \rangle$ и $\langle I,\ v_2 \rangle$ обозначим через $\langle I,\ v_1 \rangle \approx \langle I,\ v_2 \rangle$.

Теорема 2.5.1 (об эквивалентности)

Отношение эквивалентности кооперативных игр обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности.

<u>Доказательство</u>. 1) При $k = 1$ и всех $c_i = 0$ получим, что любая кооперативная игра эквивалентна самой себе $\langle I,\ v \rangle \approx \langle I,\ v \rangle$. Итак, имеет место рефлексивность.

2) Если $\langle I,\ v_1 \rangle \approx \langle I,\ v_2 \rangle$, то при $\hat{k} = 1/k$ и $\hat{c}_i = -c_i / k$ $(i \in I)$ получим

$$v_1(S) = \hat{k}\, v_2(S) + \sum_{i \in S} \hat{c}_i\,,$$

т. е. $\langle I,\ v_2 \rangle \approx \langle I,\ v_1 \rangle$. Таким образом, выполнено свойство симметричности.

3) Если $\langle I,\ v_1 \rangle \approx \langle I,\ v_2 \rangle$ и $\langle I,\ v_2 \rangle \approx \langle I,\ v_3 \rangle$, то $\langle I,\ v_1 \rangle \approx \langle I,\ v_3 \rangle$. Это свойство называется транзитивностью и оно также выполняется, т. к. если мы подставим в формулу (2.5.1) для функций v_2 и v_3 вместо v_2 аналогичную формулу для функций v_1 и v_2, то получим эквивалентность игр $\langle I,\ v_1 \rangle$ и $\langle I,\ v_3 \rangle$. $\otimes$

Теорема 2.5.2 (сохранение доминирования дележей в эквивалентных играх)

Если $\langle I,\ v\rangle \approx \langle I,\ v'\rangle$, *то соответствие дележа в первой игре* $\alpha \mapsto \alpha'$ *дележу во второй игре, где*

$$\alpha_i' = k\alpha_i + c_i, \quad \forall i \in I,$$

устанавливает взаимно однозначное отображение множества всех дележей игры $\langle I,\ v\rangle$ *на множество дележей игры* $\langle I,\ v'\rangle$, *так что из доминирования* $\alpha \underset{S}{\succ} \beta$ *дележей в игре* $\langle I,\ v\rangle$ *следует доминирование* $\alpha' \underset{S}{\succ} \beta'$ *дележей в игре* $\langle I,\ v'\rangle$.

<u>Доказательство</u>. Убедимся, что при указанном в условии теоремы соответствии α' является дележом в игре $\langle I,\ v'\rangle$. Действительно,

$$\alpha_i' = k\alpha_i + c_i \ge kv(\{i\}) + c_i = v'(\{i\}), \quad \forall i \in I \text{ и}$$

$$\sum_{i\in I}\alpha_i' = \sum_{i\in I}(k\alpha_i + c_i) = kv(I) + \sum_{i\in I} c_i = v'(I).$$

Следовательно, для α' выполнены условия дележа (2.3.7) и (2.3.8). Далее, если $\alpha \underset{S}{\succ} \beta$, то из условий доминирования (2.4.1) и (2.4.2)

$$\alpha_i' = k\alpha_i + c_i > k\beta_i + c_i = \beta_i', \quad (k > 0),$$

$$\sum_{i\in S}\alpha_i' = k\sum_{i\in S}\alpha_i + \sum_{i\in S} c_i \le kv(S) + \sum_{i\in S} c_i = v'(S),$$

т. е. $\alpha' \underset{S}{\succ} \beta'$. Взаимная однозначность отображения следует из существования обратного отображения (оно было использовано при доказательстве симметрии теоремы 2.5.1). ⊗

Объединение кооперативных игр в те или иные классы существенно упрощает их последующее исследование. Отношение эквивалентности (по известной теореме связи эквивалентности и разбиения) разбивает множество всех кооперативных игр *n* лиц на попарно непересекающиеся классы эквивалентных игр. Следовательно, можно изучать свойства кооперативных игр на наиболее простых представителях каждого класса эквивалентности.

Игрой в 0-1 редуцированной форме называется игра $\langle I,\ v\rangle$, в которой

$$v(\{i\}) = 0,\ \forall i \in I \text{ и } v(I) = 1. \tag{2.5.2}$$

Теорема 2.5.3 (нормализация игры)

Каждая существенная кооперативная игра n лиц эквивалентна некоторой игре в 0-1редуцированной форме.

Доказательство. Так как для существенной игры выполнено (2.3.6), то

$$k = \frac{1}{v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})} > 0 .$$

Если ввести числа

$$c_i = \frac{-v(\{i\})}{v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})}, \quad \forall i \in I ,$$

и определить для произвольной коалиции $S \subset I$ функцию

$$v'(S) = k\, v(S) + \sum_{i \in S} c_i \text{, то}$$

$$v'(\{i\}) = \frac{v(\{i\})}{v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})} - \frac{v(\{i\})}{v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})} = 0, \quad \forall i \in I ,$$

$$v'(I) = \frac{v(I)}{v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})} - \frac{\sum_{i \in I} v(\{i\})}{v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})} = 1.$$

Итак, мы нашли для произвольной существенной игры $\langle I,\ v \rangle$ ей эквивалентную игру $\langle I,\ v' \rangle$ в 0-1 редуцированной форме с характеристической функцией

$$v'(S) = \frac{v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\})}{v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})}, \quad \forall S \subset I . \otimes$$

Из теорем 2.5.2.и.2.5.3 следует, что все явления, описываемые в терминах доминирования дележей, для существенных игр можно исследовать на играх в 0-1 редуцированной форме.

Замечание. Дележом в произвольной игре в 0-1 редуцированной форме является любой вектор $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots, \alpha_n)$, компоненты которого удовлетворяют условиям

$$\alpha_i \geq 0 ,\ i = 1,\ \ldots,\ n ; \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 . \tag{2.5.3}$$

Задача 2.5.1. Выберите все правильные ответы в данной задаче:
в кооперативной игре трех лиц в 0-1 редуцированной форме дележами могут быть векторы: $\left(\frac{3}{5}; 0; \frac{2}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

Решение: Дележом в игре трех лиц в 0-1 редуцированной форме согласно условиям (2.5.3) может являться только вектор с тремя неотрицательными компонентами, сумма которых равна единице.

Вектор $\left(\frac{3}{5}; 0; \frac{2}{5}\right)$ является дележом в игре трех лиц в 0-1 редуцированной форме, т.к. у него три неотрицательных компоненты, сумма которых

$$\frac{3}{5}+0+\frac{2}{5}=1.$$

Вектор $\left(\frac{1}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right)$ не может быть дележом в игре в 0-1 редуцированной форме, т.к. его третья компонента отрицательна.

Вектор $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ не является дележом в игре в 0-1 редуцированной форме, т.к. его компоненты не удовлетворяют условию (2.5.3):

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}>1.$$

Вектор $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$ не является дележом в игре трех лиц, т.к. он содержит всего две компоненты, а игроков трое.

Ответ: В кооперативной игре трех лиц в 0-1 редуцированной форме дележом является вектор $\left(\frac{3}{5}; 0; \frac{2}{5}\right)$.

Замечание. Число коалиций в кооперативной игре n лиц равно 2^n-1, поэтому характеристическая функция такой игры содержит 2^n-1 параметров, но если игру привести к 0-1 редуцированному виду, то останется 2^n-n-2 параметра.

При $n=2$ число параметров $2^n-n-2=0$, поэтому будет всего одна 0-1 редуцированная характеристическая функция: $v(\{1,\ 2\})=1$, $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=v(\{2\})=0$.

В кооперативной игре трех лиц число параметров $2^n-n-2=3$. В качестве таких параметров естественно взять

$$v(\{1;\ 2\})=c_3,\ v(\{1;\ 3\})=c_2,\ v(\{2;\ 3\})=c_1.$$

Из свойств характеристической функции (2.3.1) и (2.5.2) мы получим

$$0=v(\{1\})\le v(\{1;\ 2\})=c_3\le v(\{1;\ 2;\ 3\})=1.$$

Аналогично можно доказать, что $0 \le c_2 \le 1$ и $0 \le c_1 \le 1$. Таким образом, каждая характеристическая функция игры трех лиц в 0-1 редуцированной форме описывается тройкой чисел c_1, c_2, c_3, где $c_i \in [0,\ 1]$, $i = 1,\ 2,\ 3$, которую можно трактовать как точку единичного куба.

С ростом n размерность пространства всех 0-1 редуцированных характеристических функций очень быстро растет.

2.6. С-ядро и N–M решение

Очевидно, что если игроки кооперативной игры $\langle I,\ v \rangle$ придут к такому соглашению о распределении выигрыша всей коалиции $S \subset I$ (дележу α^*), при котором ни один из дележей не доминирует дележ α^*, то такое распределение будет устойчивым в том смысле, что ни одной из коалиций S невыгодно отделиться от других игроков и распределить между членами S выигрыш $v(S)$. Это рассуждение наводит на мысль о важности множества недоминируемых дележей.

Множество недоминируемых дележей кооперативной игры $\langle I,\ v \rangle$ называется ее ***С-ядром***.

Теорема 2.6.1 (признак С-ядра)

Для того чтобы дележ α принадлежал С-ядру, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$v(S) \le \sum_{i \in S} \alpha_i, \quad \forall S \subset I. \tag{2.6.1}$$

Доказательство. Для несущественных игр теорема очевидна, а в силу теорем 2.5.2 и 2.5.3 достаточно ее доказать для игр в 0-1 редуцированной форме.

Покажем необходимость условия (2.6.1). Для любого дележа α, не удовлетворяющего (2.6.1), найдется коалиция S, для которой

$$v(S) > \sum_{i \in S} \alpha_i .$$

Положим

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{v(S) - \sum\limits_{i \in S} \alpha_i}{|S|},\ i \in S;\quad \beta_i = \frac{1 - v(S)}{|I| - |S|},\ i \notin S,$$

где $|S|$ – число игроков в коалиции S, а $|I| = n$ – общее число игроков. Очевидно, что $\beta_i \geq 0,\ \forall i \in I$, $\sum_{i \in I} \beta_i = 1$ и $\beta \underset{S}{\succ} \alpha$. Отсюда следует, что дележ α не принадлежит С-ядру.

Докажем достаточность, т. е., что если выполнено (2.6.1), то дележ α принадлежит С-ядру. Допустим от противного, что найдется такой дележ β, который $\beta \underset{S}{\succ} \alpha$. Тогда в силу определения доминирования

$$\sum_{i \in S} \alpha_i < \sum_{i \in S} \beta_i \leq v(S),$$

что противоречит (2.6.1). ⊗

Из теоремы 2.6.1 следует, что С-ядро является замкнутым, выпуклым подмножеством множества всех дележей.

Пример 2.6.1. Дележ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ принадлежит С-ядру в игре «джаз-оркестр» тогда и только тогда, когда выполнено (2.6.1):

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq 20,\ \alpha_2 \geq 30,\ \alpha_3 \geq 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 80,\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 50,\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 65, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 100. \end{cases}$$

Это множество является выпуклой оболочкой трех дележей:

$$(35,\ 45,\ 20),\ (35,\ 50,\ 15),\ (30,\ 50,\ 20),$$

т. е. выигрыши всех игроков определяются с точностью до 5 рублей. Типичным представителем ядра является центр (среднеарифметическое крайних точек) С-ядра, а именно: $\alpha^* = \left(33\frac{1}{3},\ 48\frac{1}{3},\ 18\frac{1}{3}\right)$, для которого все двухэлементные коалиции имеют одинаковый дополнительный доход. Такой дележ α^* может быть справедливым компромиссом внутри С-ядра.

Было бы идеальным найти такое распределение максимального выигрыша $v(I)$ между игроками, которое находилось бы в С-ядре и доминировало все остальные дележи. Однако это возможно только для несущественных игр.

Другим принципом оптимальности в кооперативных играх является решение по Нейману и Моргенштерну.

Решением по Нейману и Моргенштерну, или N–M решением, называется подмножество дележей L кооперативной игры $\langle I,\ v \rangle$, элементы которого доминируют все дележи, лежащие вне его (внешняя устойчивость) и не доминируют друг друга (внутренняя устойчивость).

Теорема 2.6.2 (связь С-ядра с N–M решением)

Если для характеристической функции v *кооперативной игры n лиц в 0-1 редуцированной форме выполняются неравенства*

$$v(S) \le \frac{1}{n-|S|+1}, \quad \forall S \subset I,$$

то С-ядро этой игры $\langle I,\ v\rangle$ *не пусто и является ее N–M решением.*

Доказательство данной теоремы можно найти в [7, с. 161].

К сожалению, пока не известны какие-либо универсальные критерии, позволяющие судить о наличии у конкретных кооперативных игр N–M решений, поэтому область применения N–M решений остается неопределенной.

2.7. Вектор Шепли

Рассмотрим еще один подход к поиску оптимальных решений в кооперативных играх *n* лиц, предложенный Шепли и ставший ныне наиболее распространенным на практике.

Перестановкой множества $I=\{1,\ \ldots,\ n\}$ назовем функцию $\pi: I \to I$, которая каждому номеру $i \in I$ взаимно однозначно сопоставляет элемент $\pi(i) \in I$.

Поставим в соответствие каждой кооперативной игре *n* лиц $\langle I,\ v\rangle$ вектор $\Phi(v)=(\Phi_1(v),\ \ldots,\ \Phi_n(v))$, компоненты которого будем интерпретировать как полезности, получаемые игроками в результате соглашения между собой или решения внешнего арбитра. Данный вектор $\Phi(v)$, называемый ***вектором Шепли***, должен удовлетворять четырем свойствам, называемым ***аксиомами Шепли***:

1) *Симметрия*: если $\pi: I \to I$ произвольная перестановка игроков, причем $v(S)=v(\pi(S))$ (здесь под $\pi(S)$ понимается множество образов всех игроков, входящих в коалицию S при перестановке π), то

$$\Phi_i(v(S)) = \Phi_{\pi(i)}(v(\pi(S))),$$

где $\pi(i)$ – образ игрока $i \in I$ при перестановке π.

2) *Оптимальность по Парето*:

$$\sum_{i \in I} \Phi_i(v) = v(I).$$

3) *Эффективность*: если для любой коалиции $S \subset I$ выполняется равенство $v(S \cup \{i\}) = v(S)$, то

$$\Phi_i(v) = 0.$$

4) *Агрегация*: если характеристическая функция w игры $\langle I, w \rangle$ равна сумме характеристических функций v и u соответственно игр $\langle I, v \rangle$ и $\langle I, u \rangle$, (т. е. для любой коалиции $S \subset I$ верно равенство $w(S) = v(S) + u(S)$), то

$$\Phi_i(w) = \Phi_i(v+u) = \Phi_i(v) + \Phi_i(u), \ \forall i \in I.$$

Симметрия означает, что если игра $\langle I, w \rangle$ получена из игры $\langle I, v \rangle$ только перестановкой игроков, то вектор Шепли $\Phi(w)$ может быть получен из $\Phi(v)$ просто перестановкой соответствующих компонент.

Оптимальность означает, что весь максимально возможный выигрыш в кооперативной игре $\langle I, v \rangle$ полностью распределяется между игроками.

Эффективность означает, что при распределении выигрыша ничего не достается игроку, не вносящему никакого вклада ни в какую коалицию. Естественно считать ***вкладом i-го игрока*** приращение выигрыша коалиции при участии *i*-го игрока по сравнению с выигрышем коалиции без него, т. е. вклад – это число $\left[v(S) - v(S \setminus \{i\})\right]$, где S – коалиция, в которой участвует *i*-й игрок.

Агрегация предполагает, что при участии игроков в двух разных играх $\langle I, v \rangle$ и $\langle I, u \rangle$ (сложение характеристических функций можно понимать как участие одних и тех же игроков в двух играх) их выигрыши в отдельных играх должны складываться.

Отметим, что система аксиом 1 – 4 является непротиворечивой и полной.

Теорема 2.7.1 (Шепли)

Функция Φ, *ставящая в соответствие согласно аксиомам Шепли каждой игре* $\langle I, v \rangle$ *вектор* $\Phi(v)$ *существует и единственна*.

Доказательство данной теоремы можно посмотреть в [7, с. 164].

Теорема 2.7.2 (вычисление вектора Шепли)

Компоненты вектора Шепли определяются равенствами

$$\Phi_i(v) = \sum_{S | i \in S \subset I} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \left[v(S) - v(S \setminus \{i\})\right], \ \forall i \in I. \qquad (2.7.1)$$

Доказательство данной теоремы можно посмотреть в [7, с. 167].

Задача 2.7.1. Четыре акционера имеют соответственно следующее количество акций: 10, 20, 30 и 40. Любое решение утверждается акционерами, имеющими в сумме большинство акций (>50). Это решение считается выигрышем, равным единице. Найти оптимальный дележ выигрыша между акционерами – вектор Шепли.

Решение: Выпишем все выигрывающие согласно условию задачи коалиции: $\{2,\ 4\}$, $\{3,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 4\}$, $\{1,\ 3,\ 4\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Определим для первого игрока все коалиции, выигрывающие с ним, но не выигрывающие без него. Имеется только одна такая коалиция: $\{1,\ 2,\ 3\}$, поэтому вычисленная по формуле (2.7.1) компонента вектора Шепли для первого игрока будет содержать только одно слагаемое:

$$\Phi_1(v)=\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[1-0]=\frac{2!\cdot 1!}{4!}=\frac{1}{12}.$$

Далее аналогичные действия повторим для второго игрока. Имеются одна двухэлементная и две трехэлементные коалиции, выигрывающие со вторым игроком и не выигрывающие без него. Поэтому по формуле (2.7.1)

$$\Phi_2(v)=\frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}\cdot 1+2\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

Затем тем же способом определяем

$$\Phi_3(v)=\frac{1}{4},$$

$$\Phi_4(v)=2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{12}.$$

В результате получим вектор Шепли $\Phi(v)=\left(\frac{1}{12};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{5}{12}\right)$. Заметим, что выигрыши второго и третьего игрока совпали, хотя третий игрок имеет на 10 акций больше. Это произошло из-за того, что у обоих игроков имеются равные возможности образования коалиций, выигрышных с ними и не выигрышных без них.

Отметим также, что вектор Шепли отличается от традиционного распределения выигрыша, когда общая сумма распределяется пропорционально количеству имеющихся у игроков акций: $\alpha=\left(\frac{1}{10};\ \frac{1}{5};\ \frac{3}{10};\ \frac{2}{5}\right)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном пособии изложены лишь основы теории антагонистических и неантагонистических игр. Не затронуты многие другие виды игр, например, такие как динамические игры, эволюционные игры, иерархические игры и т. д. Следует отметить, что только изучение нескольких учебников и большого числа научных работ дает объемное представление об исследуемом предмете, поэтому более полное изложение проблем теории игр читатель найдет в источниках, указанных в библиографическом списке.

Автору хотелось бы, чтобы те, кто не собирается углубленно заниматься исследованием различных видов игр, почерпнули достаточную информацию из предлагаемого пособия о понятиях и основных положениях теории игр, методах решения матричных, биматричных, кооперативных игр, а те, у кого появится особый интерес, были подготовлены к чтению специальной литературы.

Переход к методам интенсивного развития экономики, создание безотходных и экологически чистых технологий, проектирование сложных многофункциональных систем, удовлетворяющих противоречивым требованиям, обеспечение эффективного взаимодействия людей и коллективов в социальных системах требуют выработки рациональных научно-технических, проектных и управленческих решений. Формирование таких решений обычно опосредовано несовпадающими интересами сторон (например, заказчиков, проектировщиков, производителей, поставщиков, потребителей и т.п.), реализующих эти решения в партнерском взаимодействии друг с другом или в отношениях острого противостояния. Важным инструментом повышения качества обсуждаемых решений являются научные подходы, раскрывающие фундаментальные характеристики конфликтного поведения на основе математического моделирования процессов выбора решений в условиях неопределенности.

Автор надеется, что данное пособие сформирует у читателя правильные представления об основных понятиях, утверждениях и методах теории игр, широко применяемых в экономических моделях принятия эффективных решений в условиях неопределенности.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

1. Основные понятия теории игр. Классификация игр.
2. Антагонистические игры двух лиц. Принцип максимина и минимакса. Свойства максимина и минимакса.
3. Седловая точка. Свойства оптимальных стратегий в антагонистической игре. Принцип оптимальности.
4. Теорема о масштабе и эквивалентные антагонистические игры.
5. Критерий существования ситуации равновесия в чистых стратегиях.
6. Матричные игры в чистых стратегиях. Нижняя и верхняя цена игры. Максиминные и минимаксные стратегии. Седловые точки и цена игры.
7. Критерий вполне определенной матричной игры.
8. Смешанное расширение матричной игры. Ситуация равновесия в смешанных стратегиях. Теорема Неймана.
9. Первый и второй критерий ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
10. Нахождение ситуации равновесия в смешанных стратегиях в матричной игре с помощью симплекс-метода.
11. Решение матричных игр второго порядка.
12. Графоаналитический метод решения игр с платежными матрицами размерности $2 \times n$ и $m \times 2$.
13. Доминирующие и доминируемые стратегии, связь оптимальных и доминирующих стратегий.
14. Теорема о подыгре. Теорема о нежесткости.
15. Итеративный метод Брауна – Робинсона.
16. Матричные игры с природой. Критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

1. Бескоалиционные игры n лиц. Ситуация равновесия по Нэшу. Смешанное расширение конечной бескоалиционной игры. Ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.
2. Теорема Нэша.
3. Принцип оптимальности по Парето.
4. Биматричные игры. Ситуации равновесия по Нэшу и ситуации, оптимальные по Парето.
5. Классические кооперативные игры. Дележи. Свойства дележей.
6. С-ядро и решение по Нейману-Моргенштерну. Признак С-ядра.
7. Вектор Шепли, теорема о существовании и единственности вектора Шепли. Вычисление вектора Шепли.

ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найти платежную матрицу игры, (обязательно описывать пронумерованные стратегии):

ВАРИАНТ 1

Маша и Оля независимо друг от друга выбирают целые числа x и y соответственно, которые заключены между 2 и 8 включительно. Если число y – делитель числа x, то выигрывает Маша $|y-x|$ рублей, иначе выигрывает Оля, и Маша платит ей $(x+y)$ рублей. Найти платежную матрицу игры, когда Маша является первым игроком, а Оля – вторым.

ВАРИАНТ 2

Маша и Оля независимо друг от друга выбирают целые числа x и y соответственно, которые заключены между 3 и 9 включительно. Если числа y и x – взаимно простые, то выигрывает Оля, и Маша платит ей x рублей, в противном случае выигрывает Маша $|x-y|$ рублей. Найти платежную матрицу игры, когда Оля является первым игроком, а Маша – вторым.

ВАРИАНТ 3

Оля и Маша независимо друг от друга выбирают целые числа x и y соответственно, которые заключены между 1 и 7 включительно. Если число y является кратным числа x, то выигрывает Оля, и Маша платит ей x рублей, в противном случае выигрывает Маша $|y-x|$ рублей. Найти платежную матрицу игры, когда Оля является первым игроком, а Маша – вторым.

ВАРИАНТ 4

Оля и Маша независимо друг от друга выбирают целые числа x и y соответственно, которые заключены между 3 и 9 включительно. Если число x – делитель числа y, то выигрывает Оля $|x-y|$ рублей. В противном случае выигрывает Маша y рублей. Найти платежную матрицу игры, когда Маша является первым игроком, а Оля – вторым.

ВАРИАНТ 5

Оля и Маша независимо друг от друга выбирают целые числа x и y соответственно, которые заключены между 15 и 21 включительно. Если сумма x и y – нечетное число, то выигрывает Маша $|x-y|$ рублей. В противном случае выигрывает Оля, и Маша платит ей x рублей. Найти платежную матрицу игры, когда Маша является первым игроком, а Оля – вторым.

ВАРИАНТ 6

Оля и Маша независимо друг от друга выбирают целые числа x и y соответственно, которые заключены между 3 и 9 включительно. Если число $|y-x|$ является кратным числа y, то выигрывает Маша $(x+y)$ рублей, в противном случае выигрывает Оля $|y-x|$ рублей. Найти платежную матрицу игры, когда Оля является первым игроком, а Маша – вторым.

ВАРИАНТ 7

Маша и Оля независимо друг от друга выбирают целые числа x и y соответственно, которые заключены между 5 и 11 включительно. Если числа x и y являются взаимно простыми, то выигрывает Маша $(x+y)$ рублей, иначе выигрывает Оля, и Маша платит ей x рублей. Найти платежную матрицу игры, когда Маша является первым игроком, а Оля – вторым.

ВАРИАНТ 8

Оля и Маша независимо друг от друга выбирают целые числа x и y соответственно, которые заключены между 6 и 12 включительно. Если $x+y>18$, то Маша выигрывает x рублей. Если $x+y<18$, то выигрывает Оля $|x-y|$ рублей. Если $x+y=18$, то противники ничего не выплачивают друг другу. Найти платежную матрицу игры, когда Маша является первым игроком, а Оля – вторым.

ВАРИАНТ 9

Маша и Оля независимо друг от друга выбирают целые числа x и y соответственно, которые заключены между 7 и 13 включительно. Если $x-y<0$, то выигрывает Оля $|y-x|$ рублей, в противном случае выигрывает Маша y рублей. Найти платежную матрицу игры, когда Оля является первым игроком, а Маша – вторым.

ВАРИАНТ 10

Оля и Маша независимо друг от друга выбирают целые числа x и y соответственно, которые заключены между 8 и 14 включительно. Если числа x и y – взаимно простые, то выигрывает Оля $|y-x|$ рублей. В противном случае выигрывает Маша $(x+y)$ рублей. Найти платежную матрицу игры, когда Оля является первым игроком, а Маша – вторым.

Задача 2. Провести анализ платежной матрицы $\underset{m\times n}{A}$, т. е. найти:

2.1) максимально возможный выигрыш 1 игрока и все ситуации, в которых он возможен;

2.2) максимально возможный выигрыш 2 игрока и все ситуации, в которых он возможен;

2.3) максимально возможный проигрыш 1 игрока и все стратегии, при выборе которых он его получит;

2.4) максимально возможный проигрыш 2 игрока и все стратегии, при выборе которых он его получит;

2.5) максимин и минимакс;

2.6) все максиминные стратегии;

2.7) все минимаксные стратегии;

2.8) чистую цену игры;

2.9) все седловые точки.

ВАРИАНТЫ

1. $\underset{4\times 6}{A}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & -9 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -6 & -1 & -8 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

2. $\underset{6\times 4}{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 8 & -3 \\ -5 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

3. $\underset{6\times 4}{A}=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

6. $\underset{4\times 6}{A}=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 9 & 7 & 5 & 5 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & -2 & 2 & -7 & 1 \\ 6 & 4 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\underset{6\times 4}{A}=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 1 \\ 9 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\underset{6\times 4}{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 4 \\ 7 & 4 & -2 & -1 \\ 7 & 4 & 6 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 7 & 4 \\ 9 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

4. $\underset{4\times6}{A}=\begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 & 9 & -7 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 4 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

9. $\underset{4\times6}{A}=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 & 6 & 5 & 9 \\ -7 & 4 & 3 & 2 & -2 & 8 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 5 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

5. $\underset{4\times6}{A}=\begin{pmatrix} -2 & 8 & -7 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & 3 & 9 & 3 & 6 \\ -4 & 3 & 1 & -8 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

10. $\underset{6\times4}{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 7 \\ 6 & -4 & -2 & 3 \\ -4 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

Задача 3. Дана платежная матрица игры $\underset{4\times4}{B}$. Найти:

3.1) все доминируемые стратегии первого и второго игрока (за номером доминируемой стратегии писать в скобках номер доминирующей стратегии);

3.2) выигрыши первого и второго игрока в ситуации $(\xi,\ \eta)$,

если $\xi=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ и $\eta=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)$;

3.3) оптимальные стратегии обоих игроков и значение игры;

3.4) методом Брауна – Робинсона найти после десяти итераций приближенные оптимальные стратегии обоих игроков и цену игры.

ВАРИАНТЫ

1. $\underset{4\times4}{B}=\begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & -6 \\ 5 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -6 & -1 \\ -4 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\underset{4\times4}{B}=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\underset{4\times4}{B}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -5 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\underset{4\times4}{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & -3 \\ -3 & -5 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\underset{4\times4}{B}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

8. $\underset{4\times4}{B}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\underset{4\times4}{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \\ -1 & 7 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

9. $\underset{4\times4}{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -7 & -6 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\underset{4\times4}{B}=\begin{pmatrix} -2 & -8 & -3 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

10. $\underset{4\times4}{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -7 & -6 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Задача 4. Дана платежная матрица $\underset{m\times n}{A}$. Найти графоаналитическим методом ситуацию равновесия в смешанных стратегиях и значение игры.

ВАРИАНТЫ

1. $\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ 5. $\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 7. $\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 10. $\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Задача 5. Дана платежная матрица человека $\underset{4\times4}{C}$, играющего против природы. Найти все оптимальные стратегии человека по критерию

5.1) Вальда;

5.2) Сэвиджа;

5.3) Гурвица с параметром $\lambda = 0,8$;

5.4) Гурвица с параметром $\lambda = 0,2$.

ВАРИАНТЫ

1. $\underset{4\times4}{C} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\underset{4\times4}{C} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\underset{4\times4}{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\underset{4\times4}{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\underset{4\times4}{C} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\underset{4\times4}{C} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\underset{4\times4}{C} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

8. $\underset{4\times4}{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

9. $\underset{4\times4}{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\underset{4\times4}{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 6. Даны платежные матрицы первого и второго игроков соответственно. Найти все ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

ВАРИАНТЫ

1. $\underset{4\times 6}{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & -9 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -6 & -1 & -8 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times 6}{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -9 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 7 & 3 & 6 \\ 8 & -4 & 1 & -8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\underset{6\times 4}{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 8 & -3 \\ -5 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ и $\underset{6\times 4}{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 8 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\underset{4\times 6}{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 9 & 7 & 5 & 5 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & -2 & 2 & -7 & 1 \\ 6 & 4 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times 6}{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -9 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 7 & 3 & 6 \\ 8 & -4 & 1 & -8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. $\underset{6\times 4}{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 1 \\ 9 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ и $\underset{6\times 4}{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

5. $\underset{6\times 4}{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ и $\underset{6\times 4}{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\underset{6\times4}{A}^{(1)}=\begin{pmatrix}3&2&9&4\\7&4&-2&-1\\7&4&6&4\\8&1&3&5\\5&4&7&4\\9&4&6&5\end{pmatrix}$ и $\underset{6\times4}{A}^{(2)}=\begin{pmatrix}-4&2&3&-2\\5&8&5&7\\1&0&0&2\\1&0&-6&-2\\2&-1&5&4\\5&7&5&6\end{pmatrix}$

7. $\underset{4\times6}{A}^{(1)}=\begin{pmatrix}-7&2&-3&9&-7&1\\1&-5&-2&0&1&2\\8&4&4&5&4&7\\3&1&0&3&3&-4\end{pmatrix}$ и $\underset{4\times6}{A}^{(2)}=\begin{pmatrix}-8&1&-4&8&-8&0\\0&-6&-3&-1&0&2\\7&3&3&4&3&6\\2&0&-1&2&2&2\end{pmatrix}$

8. $\underset{4\times6}{A}^{(1)}=\begin{pmatrix}5&9&8&6&5&9\\-7&4&3&2&-2&8\\2&6&1&5&3&1\\5&6&5&8&5&-7\end{pmatrix}$ и $\underset{4\times6}{A}^{(2)}=\begin{pmatrix}2&7&0&0&5&0\\8&6&4&4&6&4\\3&8&-3&1&-8&0\\5&3&-1&2&1&0\end{pmatrix}$

9. $\underset{4\times6}{A}^{(1)}=\begin{pmatrix}-2&8&-7&3&6&9\\3&5&3&9&3&6\\-4&3&1&-8&2&2\\3&6&3&7&4&5\end{pmatrix}$ и $\underset{4\times6}{A}^{(2)}=\begin{pmatrix}4&8&7&5&4&8\\-8&3&2&1&-3&7\\1&5&0&4&2&0\\4&5&4&7&4&-8\end{pmatrix}$

10. $\underset{6\times4}{A}^{(1)}=\begin{pmatrix}3&2&2&8\\1&-3&-5&2\\2&2&2&7\\6&-4&-2&3\\-4&-5&0&5\\0&-2&1&-7\end{pmatrix}$ и $\underset{6\times4}{A}^{(2)}=\begin{pmatrix}2&1&9&3\\6&3&-3&-2\\6&3&5&3\\7&0&2&5\\4&3&6&3\\8&3&5&4\end{pmatrix}$

Задача 7. Даны платежные матрицы первого и второго игроков соответственно. Найти все ситуации, оптимальные по Парето.

ВАРИАНТЫ

1. $\underset{4\times4}{B}^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times4}{B}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\underset{4\times4}{B}^{(1)}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times4}{B}^{(2)}=\begin{pmatrix} -5 & -7 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\underset{4\times4}{B}^{(1)}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -7 & -6 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times4}{B}^{(2)}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\underset{4\times4}{B}^{(1)}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times4}{B}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\underset{4\times4}{B}^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -5 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times4}{B}^{(2)}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & -4 & -1 & -8 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6. $\underset{4\times4}{B}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times4}{B}^{(2)}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

7. $\underset{4\times4}{B}^{(1)}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \\ -1 & 7 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times4}{B}^{(2)}=\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

8. $\underset{4\times4}{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times4}{B}^{(2)} = \begin{pmatrix} -5 & -7 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\underset{4\times4}{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times4}{B}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \\ -1 & 7 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

10. $\underset{4\times4}{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $\underset{4\times4}{B}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Задача 8. Даны векторы. Установить, какие из них могут быть дележами в кооперативной игре *n* лиц в 0-1 редуцированной форме.

ВАРИАНТ 1

Игра трех лиц, векторы: $\left(\frac{1}{3}; 0; 0; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

ВАРИАНТ 2

Игра четырех лиц, векторы: $\left(\frac{1}{3}; 0; 0; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; 0; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

ВАРИАНТ 3

Игра трех лиц, векторы: $\left(\frac{1}{2}; 0; 0; \frac{1}{2}\right)$, $\left(0; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

ВАРИАНТ 4

Игра трех лиц, векторы: $\left(\frac{1}{3}; 0; 0; \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

ВАРИАНТ 5

Игра четырех лиц, векторы: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; 0;\ 0;\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

ВАРИАНТ 6

Игра трех лиц, векторы: $\left(\frac{3}{5}; 0;\ \frac{2}{5}\right)$, $\left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

ВАРИАНТ 7

Игра трех лиц, векторы: $\left(\frac{1}{3}; 0; 0; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{7}; \frac{6}{7}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

ВАРИАНТ 8

Игра трех лиц, векторы: $\left(\frac{1}{7}; 0; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

ВАРИАНТ 9

Игра четырех лиц, векторы: $\left(\frac{3}{5}; 0; \frac{2}{5}; 0\right)$, $\left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; -\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

ВАРИАНТ 10

Игра трех лиц, векторы: $\left(\frac{6}{7}; 0; \frac{1}{7}\right)$, $\left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(0; \frac{7}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

Задача 9. Дана характеристическая функция кооперативной игры трех лиц. Найти вектор Шепли.

ВАРИАНТЫ

1. $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=1$, $v(\{2\})=1$, $v(\{3\})=1$, $v(\{1, 2\})=6$, $v(\{1, 3\})=5$, $v(\{2, 3\})=7$, $v(\{1, 2, 3\})=16$
2. $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=2$, $v(\{2\})=2$, $v(\{3\})=2$, $v(\{1, 2\})=8$, $v(\{1, 3\})=5$, $v(\{2, 3\})=6$, $v(\{1, 2, 3\})=15$
3. $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=3$, $v(\{2\})=3$, $v(\{3\})=3$, $v(\{1, 2\})=9$, $v(\{1, 3\})=8$, $v(\{2, 3\})=7$, $v(\{1, 2, 3\})=20$
4. $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=1$, $v(\{2\})=1$, $v(\{3\})=1$, $v(\{1, 2\})=10$, $v(\{1, 3\})=4$, $v(\{2, 3\})=8$, $v(\{1, 2, 3\})=21$
5. $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=2$, $v(\{2\})=2$, $v(\{3\})=2$, $v(\{1, 2\})=6$, $v(\{1, 3\})=5$, $v(\{2, 3\})=7$, $v(\{1, 2, 3\})=17$
6. $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=2$, $v(\{2\})=2$, $v(\{3\})=2$, $v(\{1, 2\})=9$, $v(\{1, 3\})=5$, $v(\{2, 3\})=7$, $v(\{1, 2, 3\})=16$

7. $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=3$, $v(\{2\})=3$, $v(\{3\})=3$, $v(\{1,\ 2\})=7$, $v(\{1,\ 3\})=9$, $v(\{2,\ 3\})=8$, $v(\{1,\ 2,\ 3\})=13$

8. $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=1$, $v(\{2\})=1$, $v(\{3\})=1$, $v(\{1,\ 2\})=3$, $v(\{1,\ 3\})=7$, $v(\{2,\ 3\})=6$, $v(\{1,\ 2,\ 3\})=10$

9. $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=2$, $v(\{2\})=2$, $v(\{3\})=2$, $v(\{1,\ 2\})=7$, $v(\{1,\ 3\})=8$, $v(\{2,\ 3\})=5$, $v(\{1,\ 2,\ 3\})=18$

10. $v(\varnothing)=0$, $v(\{1\})=2$, $v(\{2\})=2$, $v(\{3\})=2$, $v(\{1,\ 2\})=5$, $v(\{1,\ 3\})=7$, $v(\{2,\ 3\})=6$, $v(\{1,\ 2,\ 3\})=14$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Афанасьев, М. Ю.* Прикладные задачи исследования операций : учеб. пособие для вузов / М. Ю. Афанасьев, К. А. Багриновский, В. М. Матюшок. – М. : ИНФРА-М, 2009. – 352 с.
2. *Васин, А. А.* Исследование операций : учеб. пособие для студ. вузов / А. А. Васин, П. С. Краснощеков, В. В. Морозов. – М. : Академия, 2008. – 464 с.
3. *Вентцель, Е. С.* Исследование операций: Задачи, принципы, методология : учеб. пособие для вузов / Е. С. Вентцель. – М. : КНОРУС, 2010. – 192 с.
4. *Дубина, И. Н.* Основы теории экономических игр : учебное пособие / И. Н. Дубина. – М. : КНОРУС, 2010. – 208 с.
5. *Костевич, Л. С.* Исследование операций. Теория игр : учеб. пособие для вузов (спец. экон.) / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – Минск : Вышэйшая школа, 2008. – 368 с.
6. *Невежин, В. П.* Исследование операций и принятие решений в экономике : сборник задач и упражнений : учеб. пособие для вузов / В. П. Невежин, С. И. Кружилов, Ю. В. Невежин. – М. : ФОРУМ, 2012. – 400 с.
7. *Петросян, Л. А.* Теория игр : учеб. пособие для вузов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. В. Шевкопляс. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
8. *Тжаскалик, Т.* Введение в исследование операций с применением компьютера [Электронный ресурс] : пер. с пол. / Т. Тжаскалик. – М. : Горячая линия-Телеком, 2009.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ **3**

Глава 1. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ **6**

1.1. Матричные игры …. 6
1.2. Максимин и минимакс 14
1.3. Ситуация равновесия 17
1.4. Смешанное расширение матричной игры 24
1.5. Основные свойства ситуации равновесия в смешанных стратегиях 34
1.6. Игры с матрицей второго порядка 39
1.7. Игры с матрицами размерности 2x*n* и *m*x2 41
1.8. Доминируемые стратегии 48
1.9. Итеративный метод решения матричных игр 57
1.10. Матричные игры с природой 62

Глава 2. НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ **68**

2.1. Бескоалиционные игры с ненулевой суммой 68
2.2. Биматричные игры..... 71
2.3. Основные понятия кооперативных игр 76
2.4. Доминирование дележей..... 79
2.5. Эквивалентность и нормализация игр..... 80
2.6. С-ядро и N-M решение..... 84
2.7. Вектор Шепли 86

ЗАКЛЮЧЕНИЕ **89**
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ **90**
ЗАДАНИЯ **91**
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК **102**

Учебное издание

Хан Сун Э

ТЕОРИЯ ИГР

Учебное пособие

Отпечатано с авторского оригинала-макета
Дизайнер обложки *И. Л. Тюкавкина*

Подписано в печать 30.03.15. Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$.
Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 6,51. Тираж 150 экз. Заказ 96.

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Отдел оперативной полиграфии издательства Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.